Fonction dérivée, dérivée globale

Table des matières

I Notation et vocabulaire

Dans la suite du chapitre, f est une fonction définie sur un intervalle ouvert D_f contenant a et $\mathscr{C}_f$ est la courbe représentative de f dans un repère orthogonal.

Rappel

f est dérivable en a lorsque, pour tout $h \neq 0$, le nombre $\tau(h) = \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ admet une limite finie ℓ quand h tend vers 0.
ℓ est appelé **nombre dérivé de f en a**; on le note $f'(a)$.
On écrit alors : $f'(a) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ ou $f'(a) = \lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ en posant $x = a+h$.
$f'(a)$ est alors le coefficient directeur de la tangente à $\mathscr{C}_f$ en a.

II Fonction dérivée

Définition

Soit I un intervalle inclus dans $\mathscr{D}_f$.
On dit que la fonction f est dérivable sur I lorsqu'elle est dérivable en tout a de I
Si f est dérivable sur I, on appelle **fonction dérivée** de f la fonction, notée f', définie sur I par :

$$f' : x \mapsto f'(x).$$

Remarque : f' associe à chaque valeur de x le coefficient directeur de la tangente à la courbe au point d'abscisses x.

III Dérivée de fonctions usuelles

Fonction f	**définie sur**	**Fonction dérivée f'**	**dérivable sur**
$f(x) = k$	définie sur$\mathbb{R}$	$f'(x) = 0$	sur $\mathbb{R}$
$f(x) = ax + b$	définie sur $\mathbb{R}$	$f'(x) = a$	sur $\mathbb{R}$
$f(x) = x^n$	définie sur $\mathbb{R}$; $n \in \mathbb{N}(n > 1)$	$f'(x) = nx^{n-1}$	sur $\mathbb{R}$
$f(x) = \sqrt{x}$	définie sur $[0\ ;\ +\infty[$	$f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$	sur $]0\ ;\ +\infty[$
$f(x) = \dfrac{1}{x}$	définie sur $\mathbb{R}^*$	$f'(x) = -\dfrac{1}{x^2}$	sur $\mathbb{R}^*$
$f(x) = \dfrac{1}{x^n}$	définie sur $\mathbb{R}^*$; $n \in \mathbb{N}$; $n > 1$	$f'(x) = -\dfrac{n}{x^{n+1}}$	sur $\mathbb{R}^*$
$f(x) = \cos(x)$	définie sur $\mathbb{R}$	$f'(x) = -\sin(x)$	sur $\mathbb{R}$
$f(x) = \sin(x)$	définie sur $\mathbb{R}$	$f'(x) = \cos(x)$	sur $\mathbb{R}$

Exemples :

a) $f(x) = 5$; $f(x) = k$ avec $k = 5$ donc $\boxed{f'(x) = 0}$ sur $\mathbb{R}$.

b) $f(x) = 3x + 5$; $f(x) = ax + b$ avec $\begin{cases} a = 3 \\ b = 5 \end{cases}$ donc $f'(x) = a$ d'où $\boxed{f'(x) = 3}$ sur $\mathbb{R}$

c) $f(x) = x^8$; $f(x) = x^n$ avec $n = 8$ donc $f'(x) = nx^{n-1}$ donc $\boxed{f'(x) = 8x^7}$.

d) $f(x) = \dfrac{1}{x^9}$; $f(x) = \dfrac{1}{x^n}$ avec $n = 9$ donc $f'(x) = -\dfrac{n}{x^{n+1}}$ d'où $\boxed{f'(x) = -\dfrac{9}{x^{10}}}$ sur $\mathbb{R}^*$

IV Opérations algébriques sur les fonctions dérivées :

u et v sont des fonctions dérivables sur un même intervalle I. Alors :

Propriétés

1. Pour k réel, ku est dérivable et : $(ku)' = ku'$; $(ku)'(x) = ku'(x)$.
2. $u + v$ est dérivable sur I et : $(u + v)' = u' + v'$; $(u + v)'(x) = u'(x) + v'(x)$.
3. uv est dérivable et $(uv)' = u'v + uv'$; $(uv)'(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$
4. $\left(\dfrac{1}{v}\right)$ est dérivable; $\left(\dfrac{1}{v}\right)' = -\dfrac{v'}{v^2}$; $\left(\dfrac{1}{v}\right)'(x) = -\dfrac{1}{v^2(x)}$
5. $\dfrac{u}{v}$ est dérivable et $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$.

Démonstrations :

1. $\dfrac{(ku)(a+h)-(ku)(a)}{h}=\dfrac{ku(a+h)-ku(a)}{h}=k\times\dfrac{u(a+h)-u(a)}{h}$.
   Comme u est dérivable en a, $\lim\limits_{h\to 0}\left(\dfrac{u(a+h)-u(a)}{h}\right)=u'(a)$ d'où $\lim\limits_{h\to 0}\left(\dfrac{(ku)(a+h)-(ku)(a)}{h}\right)=k\times u'(a)$.
2. Soit a un réel fixé dans I. u et v sont dérivables en a.
   Il faut étudier la limite quand h tend vers 0 de la quantité : $\dfrac{(u+v)(a+h)-(u+v)(a)}{h}$.
   $\dfrac{(u+v)(a+h)-(u+v)(a)}{h}=\dfrac{u(a+h)+v(a+h)-u(a)-v(a)}{h}=\dfrac{u(a+h)-u(a)}{h}+\dfrac{v(a+h)-v(a)}{h}$.
   La première fraction tend vers $u'(a)$ et la seconde vers $v'(a)$ donc par somme :
   $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{(u+v)(a+h)-(u+v)(a)}{h}=u'(a)+v'(a)$.
3. Il s'agit d'étudier $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{(uv)(a+h)-(uv)(a)}{h}$.
   On utilise une astuce de calcul :
   $(uv)(a+h)-(uv)(a)=u(a+h)v(a+h)-u(a)v(a)$
   $=u(a+h)v(a+h)-u(a)v(a+h)+u(a)v(a+h)+u(a)v(a)$.

   On en déduit :
   $\dfrac{(uv)(a+h)-(uv)(a)}{h}=\dfrac{u(a+h)v(a+h)-u(a)v(a+h)+u(a)v(a+h)+u(a)v(a)}{h}$
   $=\dfrac{[u(a+h)v(a+h)-u(a)v(a+h)]+[u(a)v(a+h)+u(a)v(a)]}{h}$
   $=\dfrac{[u(a+h)-u(a)]v(a+h)+u(a)[v(a+h)-v(a)]}{h}$
   $=\dfrac{u(a+h)-u(a)}{h}\times v(a+h)+u(a)\times\dfrac{v(a+h)-v(a)}{h}$.
   On admet que $\lim\limits_{h\to 0}v(a+h)=v(a)$.
   Puisque u est dérivable en a, $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{u(a+h)-u(a)}{h}=u'(a)$.
   Puisque v est dérivable en a, $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{v(a+h)-v(a)}{h}=v'(a)$.
   D'où : $\boxed{\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{(uv)(a+h)-(uv)(a)}{h}=u'(a)v(a)+u(a)v'(a)}$.
4. Montrons que $\dfrac{1}{v}$ est dérivable en a :
   $\dfrac{\left(\frac{1}{v}\right)(a+h)-\left(\frac{1}{v}\right)(a)}{h}=\dfrac{\frac{1}{v(a+h)}-\frac{1}{v(a)}}{h}=\dfrac{\frac{v(a)-v(a+h)}{v(a)v(a+h)}}{h}=\dfrac{v(a)-v(a+h)}{hv(a)v(a+h)}$
   $=-\dfrac{1}{v(a)v(a+h)}\times\dfrac{v(a+h)-v(a)}{h}$ d'où : $\boxed{\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\left(\frac{1}{v}\right)(a+h)-\left(\frac{1}{v}\right)(a)}{h}=-\dfrac{v'(a)}{v^2(a)}}$
5. Pour montrer que $\dfrac{u}{v}$ est dérivable, on écrit $\dfrac{u}{v}=u\times\dfrac{1}{v}$; on a vu que $\dfrac{1}{v}$ était dérivable et que le produit de deux fonctions dérivables l'est également.
   On utilise alors la formule donnant la dérivée du produit.

Exemples :

a) $f(x)=3x^7$; $f=ku$ avec $k=3$ et $u(x)=x^n$ avec $n=7$.
$f'=(ku)'=ku'$ avec $u'(x)=7x^6$ donc $f'(x)=3\times 7x^6=\boxed{21x^6}$.

b) $f(x)=x^2+x$; $f=u+v$ avec $u(x)=x^2$ et $v(x)=x$.
$f'=u'+v'$ avec $u'(x)=2x$ et $v'(x)=1$ donc $\boxed{f'(x)=2x+1}$

c) $f(x)=\dfrac{1}{x^2+x+1}$ sur $\mathbb{R}$; $f=\dfrac{1}{u}$ avec $u(x)=x^2+x+1$.
$f'=\left(\dfrac{1}{u}\right)'=-\dfrac{u'}{u^2}$ avec $u'(x)=2x+1$.
On en déduit : $\boxed{f'(x)=\dfrac{2x+1}{x^2+x+1}}$.

d) $f(x)=(2x+3)\sqrt{x}$ sur $]0\,;\,+\infty[$.
$f=uv$ avec $\begin{cases} u(x)=2x+3 \\ v(x)=\sqrt{x} \end{cases}$.
$f'=u'v+uv'$ avec $\begin{cases} u'(x)=2 \\ v'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}} \end{cases}$.
Donc $f'(x)=2\sqrt{x}+(2x+3)\times\dfrac{1}{2\sqrt{x}}=\dfrac{2\sqrt{x}\times 2\sqrt{x}+(2x+3)}{2\sqrt{x}}=\dfrac{4x+2x+3}{2\sqrt{x}}=\dfrac{6x+3}{2\sqrt{x}}=\boxed{\dfrac{3(2x+1)}{2\sqrt{x}}}$

e) $f(x)=\dfrac{2x+3}{5x+7}$ sur $\mathscr{D}=\mathbb{R}\setminus\left\{-\dfrac{7}{5}\right\}$.
$f=\dfrac{u}{v}$ avec $\begin{cases} u(x)=2x+3 \\ v(x)=5x+7 \end{cases}$.
$f=\left(\dfrac{u}{v}\right)'=\dfrac{u'v-uv'}{v^2}$ avec $\begin{cases} u'(x)2 \\ v'(x)=5 \end{cases}$.
Alors : $f'(x)\dfrac{2(5x+7)-5(2x+3)}{(5x+7)^2}=\dfrac{10x+14-10x-15}{(5x+7)^2}=\boxed{-\dfrac{1}{(5x+7)^2}}$

V Dérivée de la fonction $gx\mapsto f(ax+b)$:

Théorème admis

Soit f une fonction dérivable et soit $a\in\mathbb{R}$. Alors : g est dérivable : $\boxed{g'(x)=a\times f'(ax+b)}$.

Exemples :

a) $f(x)=\sin(2x+3)=\sin(ax+b)$ avec $a=2$ et $b=3$.
Onen déduit : $f'(x)=a\sin'(ax+b)$ d'où $f'(x)=2\cos(2x+3)$.

b) Calculer $f'(x)$ avec $f(x)=\sqrt{5x+7}$ pour $x>-\dfrac{7}{5}$.

$f(x)=\sqrt{ax+b}$ avec $a=5$ et $b=7$.

$f'(x)=5\times\dfrac{1}{2\sqrt{5x+7}}=\boxed{\dfrac{5}{2\sqrt{5x+7}}}$

VI Étude des variations d'une fonction

Théorème

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I.

- Si f est croissante sur I, alors $f'(x)\geqslant 0$ pour tout x de I.
- Si f est décroissante sur I, alors $f'(x)\leqslant 0$ pour tout x de I.
- Si f est constante sur I, alors $f'(x)=0$ pour tout x de I.

Démonstration :

- Soit f dérivable et croissante sur I. Soit $x_0\in I$.
  Par hypothèse, pour tous a et b tels que $a<b$, alors $f(a)<f(b)$ donc $f(a)-f(b)<0$.
  Soit $h\neq 0$ tel que $x_0+h\in I$.
  $\tau_{x_0}(h)=\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$; or ce nombre est positif et on sait qu'il a une limite quand h tend vers 0 :
  $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=f'(x_0)$; par conséquent, $f'(x_0)\geqslant 0$.
- Les deux autres cas se démontrent de la même façon.

Théorème admis

Il s'agit de la réciproque du théorème précédent :
Soit f une fonction dérivable sur un intervalle ouvert I.

- Si f' est nulle sur I, alors f est constante sur I.
- Si f' est strictement positive sur I, sauf éventuellement en quelques points isolés où elle s'annule ; f est croissante sur I.
- Si f' est strictement négative sur I, sauf éventuellement en quelques points isolés où elle s'annule ; f est décroissante sur I.

Exemples :

a) $f(x)=ax+b$; $f'(x)=a$ donc f est croissante si, et seulement si, $a>0$ et f est décroissante si, et seulement si, $a<0$

b) $f(x)=ax^2+bx+x$ $(a\neq 0)$.
$f'(x)=2ax+b$.
$f'(x)=0\Leftrightarrow x=-\dfrac{b}{2a}$. On a deux cas :

- $a>0$; $f'(x)<0\Leftrightarrow x<-\dfrac{b}{2a}$.

Tableau de variation :

x	$-\infty$		$-\dfrac{b}{2a}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$f\left(-\dfrac{b}{2a}\right)$	$\nearrow$	$+\infty$

- $a < 0$; $f'(x) < 0 \Leftrightarrow x > -\dfrac{b}{2a}$.
  Tableau de variation :

x	$-\infty$		$-\dfrac{b}{2a}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$f\left(-\dfrac{b}{2a}\right)$	$\searrow$	$-\infty$

c) $f(x) = x^3$
$f(x) = 3x^2 \geqslant 0$ sur $\mathbb{R}$ donc f est croissante.

d) $f(x) = 2x^3 - 12x^2 - 126x$.
$f'(x) = 6x^2 - 24x - 126 = 6\left(x^2 - 4x - 21\right)$.
$f'(x)$ est du signe de $x^2 - 4x - 21$.
$\Delta = (-4)^2 - 4 \times 1 \times (-21) = 16 + 84 = 100 > 0$.
Il y a deux racines : $x_1 = \dfrac{4-10}{2} = -3$ et $x_2 = \dfrac{4+10}{2} = 7$.
$x^2 - 4x - 21$ est su signe du coefficient de x^2, 1, positif, à l'extérieur de l'intervalle formé par les racines (et négatif entre les racines). Tableau de variation :

x	$-\infty$		-3		8		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	216	$\searrow$	-784	$\nearrow$	$+\infty$

e) Soit f la fonction définie sur $[-3\,;\,3]$ par $f(x) = \dfrac{2}{3}x^3 - \dfrac{3}{2}x^2 - 2x + 1$.
Étudions les variations de f :

- $f'(x) = \dfrac{2}{3} \times 3x^2 - \dfrac{3}{2} \times 2x - 2 = \boxed{2x^2 - 3x - 2}$.
- Signe de $f'(x)$:
  $f'(x)$ est un trinôme du second degré.
  $\Delta = (-3)^2 - 4 \times 2 \times (-2) = 9 + 16 = 25 > 0$.
  Il y a donc deux racines :
  $x_1 = \dfrac{3 - \sqrt{25}}{2 \times 2} = \dfrac{3-5}{4} = -\dfrac{1}{2}$ et $x_2 = \dfrac{3+5}{4} = 2$.

- $f'(x)$ est du signe du coefficient de x^2, 2, positif, à l'extérieur de l'intervalle formé par les racines est négatif entre les racines.
- Tableau de signes et de variation :

x	-3		$-\frac{1}{2}$		2		3
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\frac{49}{2}$	$\nearrow$	$\frac{37}{24}$	$\searrow$	$-\frac{11}{3}$	$\nearrow$	$-\frac{1}{2}$

VII Extremum local d'une fonction :

Définition

Soit f une fonction définie sur un intervalle I et soit $x_0 \in I$.
f admet un maximum local (respectivement minimum) M en x_0 s'il existe un intervalle J inclus dans I contenant x_0 tel que M soit le maximum (respectivement minimum) de f.

Théorème (admis)

Soit f une fonction dérivable sur I et soit $x_0 \in I$.

- Si f admet un extremum local en x_0, alors $f'(x_0) = 0$.
- Si $f'(x_0) = 0$ **en changeant de signe**, alors f admet un extremum local en x_0

Remarque : la condition $f'(x_0) = 0$ ne suffit pas : exemple : $f(x) = x^3$ en 0.

VIII Plan d'étude d'une fonction f

- On cherche l'ensemble de définition de f.
- On détermine l'ensemble sur lequel f est dérivable.
- On résout l'équation $f'(x) = 0$.
- On étudie soigneusement le signe de $f'(x)$.
- On consigne les résultats dans un tableau regroupant le signe de $f'(x)$ et les variations de f.