Spécialité première : correction du devoir sur feuille n° 3

Exercice I

1. (a) Pratiquer une augmentation de 20 % revient à multiplier par le coefficient multiplicateur $C = 1 + \dfrac{20}{100} = 1{,}2$
   Chaque jour, on perd 100 g donc $\boxed{u_{n+1} 1{,}2u_n - 100}$

   (b) • $u_1 = 1{,}2 \times 1\,000 - 100 = \boxed{1\,100}$
   • $u_2 = 1{,}2u_1 - 100 = \boxed{1\,220}$
   • $u_1 - u_0 = 100$ et $u_2 - u_1 = 120 \neq uř_1 - u_0$ donc (u_n) n'est pas arithmétique.
   • $\dfrac{u_2}{u_1} = \dfrac{61}{55}$ et $\dfrac{u_1}{u_0} = \dfrac{1\,100}{1\,000} = \dfrac{11}{10} \neq \dfrac{u_2}{u_1}$ donc (u_n) n'est pas géométrique.

   (c) À la calculatrice, on trouve $u_{22} < 30\,000$ et $u_{23} > 30\,000$.
   La masse dépassera 30 kg au bout de 23 jours.

   (d) Compléter l'algorithme suivant pour qu'il réponde au problème posé dans la question précédente.

Variables	u et n sont des nombres

Traitement	u prend la valeur 1 000
	n prend la valeur 0
	Tant que $u < 30000$ faire
	   u prend la valeur $1{,}2u - 100$
	   n prend la valeur $n+1$
	Fin Tant que

Sortie	Afficher ....

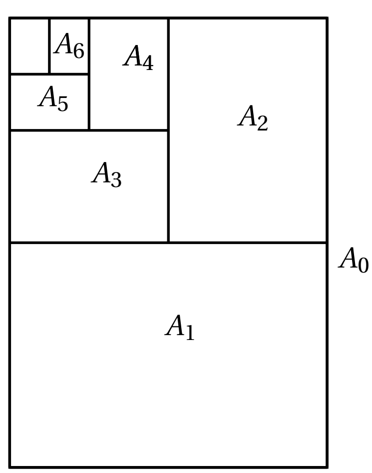
2. On définit la suite (v_n) par : pour tout entier naturel n, $v_n = u_n - 500$.

   (a) Pour tout n, $v_{n+1} = u_{n+1} - 500 = (1{,}2u_n - 100) - 500 = 1{,}2u_n - 600 = 1{,}2\,(u_n - 500) = \boxed{1{,}2v_n}$.
   La suite (v_n) est géométrique de raison $\boxed{q = 1{,}2}$.
   Son premier terme est $v_0 = u_0 - 500 = 1\,000 - 500 = \boxed{500}$.

   (b) On en déduit : $v_n = v_0 q^n = 500 \times 1{,}2^n$; $\boxed{v_n = 500 \times 1{,}2^n}$.
   D'où $u_n = v_n + 500 = 500 \times 1{,}2^n + 500 = \boxed{500\left(1 + 1{,}2^n\right)}$.

   (c) À la calculatrice, il semble que $\boxed{\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty}$

Exercice II



1. On souhaite que le rapport des longueurs aux largeurs soit toujours le même.

   (a) Le rapport $\dfrac{\text{Longueur}}{\text{largeur}}$ est constant donc $\dfrac{L_1}{\ell_1} = \dfrac{L_0}{\ell_0}$.

   Or $L_1 = \ell_0$ et $\ell_1 = \dfrac{L_0}{2}$ donc $\dfrac{\ell_0}{\frac{L_0}{2}} = \dfrac{L_0}{\ell_0}$.

   On en déduit : $\ell_0^2 = \dfrac{L_0^2}{2}$ donc $L_0^2 = 2\ell_0^2$ d'où $2 = \left(\dfrac{L_0}{\ell_0}\right)^2$.

   Par conséquent : $\boxed{\dfrac{L_0}{\ell_0} = \sqrt{2}}$

   (b) L'aire du rectangle initiale vaut 1 donc $L_0\ell_0 = 1$ donc $\ell_0 = \dfrac{1}{L_0}$.

   Alors : $\dfrac{L_0}{\ell_0} = \sqrt{2} \Leftrightarrow \dfrac{L_0}{\frac{1}{L_0}} = \sqrt{2} \Leftrightarrow L_0^2 = \sqrt{2} \Leftrightarrow \boxed{L_0 = \sqrt[4]{2}}$.

   $L_0\ell_0 = 1 \Leftrightarrow \ell_0 = \dfrac{1}{L_0}$ donc $\boxed{\ell_0 = \dfrac{1}{\sqrt[4]{2}}}$.

2. (a) Par définition et d'après 1., pour tout n : $\boxed{\dfrac{L_n}{\ell_n} = \sqrt{2}}$.

   On sait, par définition, que $\ell_n = \dfrac{L_n}{2}$.

   On en déduit : $\dfrac{L_{n+1}}{\frac{L_n}{2}} = \sqrt{2}$ donc $\dfrac{2L_{n+1}}{L_n} = \sqrt{2}$ d'où $\dfrac{L_{n+1}}{L_n} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

   La suite (L_n) est donc géométrique, de raison $\boxed{q = \dfrac{\sqrt{2}}{2}}$.

   $\boxed{L_0 = \dfrac{1}{\ell_0} = \sqrt[4]{2}}$

   (b) $0 < q = \dfrac{\sqrt{2}}{2} < 1$ donc la suite (L_n) est **décroissante**.

   (c) La suite (L_n) est géométrique donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $L_n = L_0 q^n$ donc

$$L_n = \sqrt[4]{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n$$

3. Pour tout n : $\dfrac{L_{n+1}}{\ell_{n+1}} = \dfrac{L_n}{\ell_n} \Leftrightarrow \dfrac{L_{n+1}}{L_n} = \dfrac{\ell_{n+1}}{\ell_n}$ donc $\dfrac{\ell_{n+1}}{\ell_n} = \dfrac{1}{\frac{L_{n+1}}{L}\ n} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

   (ℓ_n) est une suite géométrique, de raison $q' = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

4. D'après ce qui précède, $L_4 = \sqrt[4]{2}\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^4 \approx 0,297$ m $\approx \boxed{29,7\text{cm}}$.

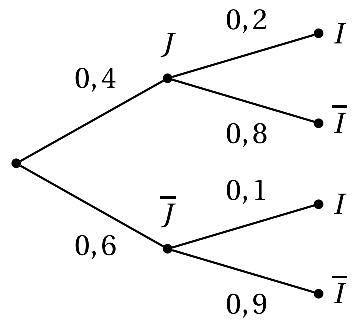
   $\ell_4 = \dfrac{L_4}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt[4]{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^4}{\sqrt{2}} \approx 0,21\text{m} = \boxed{21\text{cm}}$.

   On retrouve bien le format A_4 communément appelé $21 \times 29,7$

Exercice III Inversion d'un arbre de probabilités

Une société effectue auprès de 10 000 personnes une étude de marché concernant un nouveau produit. Dans cet échantillon, 40 % sont des jeunes (moins de 20 ans) et 20 % de ceux-ci se déclarent intéressés par le produit.
En revanche, 10 % seulement des personnes de plus de 20 ans se déclarent intéressées par le produit.
On choisit une personne au hasard dans l'échantillon. On note J l'événement « La personne est jeune » et I « La personne est intéressée ».

1. Reproduire et compléter l'arbre de probabilités ci-dessous :

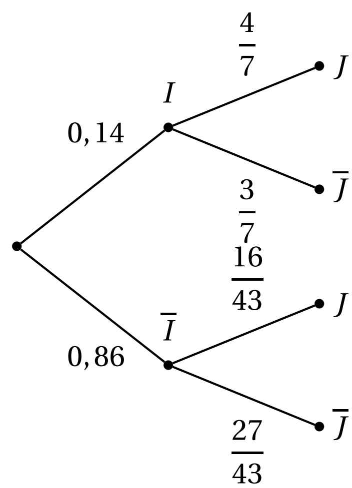


2. (a)
   - $p(I \cap J) = p_J(I) \times p(J) = 0,2 \times 0,4 = \boxed{0,08}$
   - $p\left(I \cap \overline{J}\right) = 0,1 \times 0,6 = \boxed{0,06}$
   - $p\left(\overline{I} \cap J\right) = 0,8 \times 0,4 = \boxed{0,32}$
   - $p\left(\overline{I} \cap \overline{J}\right) = 0,9 \times 0,6 = \boxed{0,54}$

   (b) D'après la formule des probabilités totales :
   $p(I) = p_J(I) \times p(J) + p_{\overline{J}}(I) \times p\left(\overline{J}\right) = 0,08 + 0,06 = \boxed{0,14}$

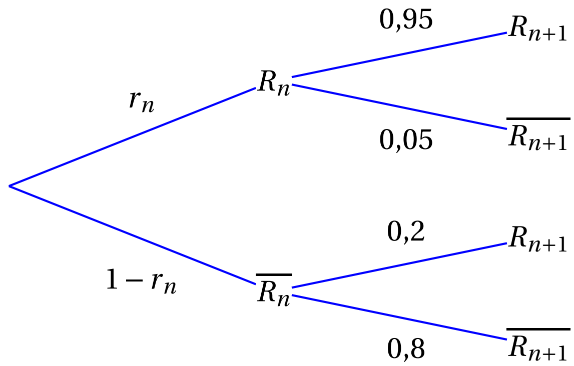
3. (a) La probabilité que la personne ait moins de 20 ans sachant que la personne est intéressée par le produit est :
   $p_I(J) = \dfrac{o(I \cap J)}{p(I)} = \dfrac{0,08}{0,14} = \dfrac{8}{14} = \dfrac{4}{7}$; $\boxed{p_I(J) = \dfrac{4}{7}}$

   (b) Pour compléter l'arbre ci-dessous, on doit calculer :
   $p_{\overline{I}}(J) = \dfrac{p\left(\overline{I} \cap J\right)}{p\left(\overline{I}\right)} = \dfrac{0,32}{0,86} = \dfrac{32}{86} = \dfrac{16}{43}$



Exercice IV

1. On obtient l'arbre pondéré suivant :



2. D'après la formule des probabilités totales :
$r_{n+1} = p\left(R_{n+1}\right) = p\left(R_{n+1} \cap R_n\right) + p\left(R_{n+1} \cap \overline{R_n}\right)$
$= p_{R_n}\left(R_{n+1}\right) \times p\left(R_n\right) + p_{\overline{R_n}}\left(R_{n+1}\right) \times p\left(R_n\right)$
$= 0,95 r_n + 0,2\left(1 - r_n\right) = 0,95 r_n + 0,2 - 0,19 r_n = 0,75 r_n + 0,2.$
Donc $\boxed{r_{n+1} = 0,75 r_n + 0,2}$

3. Pour tout entier naturel n non nul, on considère la suite $\left(v_n\right)$ définie par $v_n = r_n - 0,8$.
Pour tout $n \geqslant 1$:
$v_{n+1} = r_{n+1} - 0,8$
$0,75 r_n + 0,2 - 0,8$
$= 0,75 r_n - 0,6 = 0,75\left(r_n - \dfrac{0,6}{0,75}\right) = 0,75\left(r_n - \dfrac{60}{75}\right) = 0,75\left(r_n - \dfrac{4}{5}\right) = 0,75\left(r_n - 0,8\right) = \boxed{0,75 v_n}$.
Par conséquent : $\boxed{v_{n+1} = 0,75 v_n}$.
La suite $\left(v_n\right)$ est donc géométrique de raison $\boxed{q = 0,75}$ et de premier terme $v_1 = p_1 - 0,8 = 0,9 - 0,8 = \boxed{0,1}$.

4.
   - Puisque $\left(v_n\right)$ est géométrique, on a : $v_n = v_1 q^{n-1}$ donc $\boxed{v_n = 0,1 \times 0,75^{n-1}}$.
   - $v_n = r_n - 0,8$ donc $r_n = 0,8 + v_n$ donc $\boxed{r_n = 0,8 + 0,1 \times 0,75^{n-1}}$

5. À la calculatrice, on constate que r_n se rapproche de plus en plus de 0,8 ; $\boxed{\lim\limits_{n \to +\infty} r_n = 0,8}$.
Cela signifie qu'à long terme, 80 % des bouteilles sont rapportées.