Spécialité : correction du devoir sur feuille n° 1
(à rendre sur copie double)

I

$$A=\frac{8\times 10^{15}\times 15\times 10^{-5}}{20\times\left(10^2\right)^5}=\frac{2^3\times(2\times5)^{15}\times3\times5\times(2\times5)^{-5}}{2^2\times5\times\left((2\times5)^2\right)^5}=\frac{2^3\times2^{15}\times5^{15}\times3\times5\times2^{-5}\times5^{-5}}{2^2\times5\times2^{10}\times5^{10}}$$
$=2^{3+15-5-2-10}\times3\times5^{15+1-5-1-10}=2^1\times3\times5^0=2\times3\times1=\boxed{6}$

II

x et y étant des réels quelconques (x non nul)

1. (a) Le produit de la somme de x et de y par leur différence est $\boxed{(x+y)(x-y)}$
   (b) Le carré du produit de x et de y est $(xy)^2$.
   (c) La différence des carrés de x et y est $\boxed{x^2-y^2}$.
   (d) Le produit des carrés de x et de y est x^2y^2.
   (e) Le carré de l'inverse de x est $\left(\frac{1}{x}\right)^2$.
   (f) L'inverse du carré de x est $\frac{1}{x^2}$.
2. On a :
   - $(x+y)(x-y)=x^2-y^2$ (identité remarquable).
   - $(xy)^2=x^2y^2$
   - $\left(\frac{1}{x}\right)^2=\frac{1}{x^2}$

   Les expressions a) et c) sont égales, de même que b) et d), ainsi que e) et f).

III

Pour tout x non nul et différent de -1 :

$$\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}=\frac{x+1}{x(x+1)}-\frac{x}{x(x+1)}=\frac{x+1-x}{x(x+1)}=\boxed{\frac{1}{x^2+x}}$$

IV

On donne l'expression $A(x)=(2x-3)^2-1$.

1. $A(x)=(2x)^2-2\times2x\times3+3^2-1=4x^2-12x+9-1=\boxed{4x^2-12x+8}$
2. Factorisons $A(x)$:
   $A(x)=(2x-3)^2-1=(2x-3)^2-1^2=[(2x-3)-1][(2x-3)+1]=\boxed{(2x-4)(2x-2)}$.
   Remarque : $A(x)=2(x-2)\times2(x-1)=\boxed{4(x-2)(x-1)}$
3. Résoudre dans l'ensemble des réels $\mathbb{R}$:
   (a) $A(x)=0\Leftrightarrow4(x-2)(x-1)=0$.
   Un produit de facteurs est nul si, et seulement si, l'un des facteurs est nul.
   On en déduit $\boxed{\mathscr{S}=\{1\ ;\ 2\}}$ (« évident »)
   (b) $A(x)=8\Leftrightarrow4x^2-12x+8=8\Leftrightarrow4x^2-12x=0\Leftrightarrow4x(x-3)=0$.
   Un produit de facteurs est nul si, et seulement si, l'un des facteurs est nul.
   On en déduit : $\boxed{\mathscr{S}=\{0\ ;\ 3\}}$

V

On considère l'expression algébrique

$$A(x) = (2x+1)(-3x+7).$$

1. Résoudre l'équation $A(x) = 0$.
   Un produit de facteurs est nul si, et seulement si, l'un des facteurs est nul.

   - $2x+1 = 0 \Leftrightarrow x = -\dfrac{1}{2}$
   - $-3x+7 = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{7}{3}$

   L'ensemble des solutions est $\boxed{\mathscr{S} = \left\{-\dfrac{1}{2}\,;\,\dfrac{7}{3}\right\}}$.

2. - $2x+1 > 0 \Leftrightarrow x > -\dfrac{1}{2}$
   - $-3x+7 > 0 \Leftrightarrow x < \dfrac{3}{7}$ (on divide des deux côtes par -3, donc l'inégalité change de sens)

   On en déduit le tableau de signes :

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		$\frac{7}{3}$		$+\infty$
$2x+1$		$-$	0	$+$	$\vert$	$+$	
$-3x+7$		$+$	$\vert$	$+$	0	$-$	
$A(x) = (2x+1)(-3x+7)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

3. On en déduit que les solutions de l'inéquation $A(x) \leqslant 0$ sont $\boxed{\mathscr{S} = \left]-\infty\,;\,-\dfrac{1}{2}\right] \cup \left[\dfrac{3}{7}\,;\,+\infty\right[}$.

VI

On considère un carré $ABCD$ de côté 10 cm et E un point **variable** sur le côté $[AB]$.
On construit le polygone EBFGDH, noté $\mathscr{P}$, inscrit dans le carré tel que $AE = BF = CG = DH$ et colorié ci-dessous.
On pose $AE = x$.

1. (a) $\boxed{EB = 10 - x}$

   (b) L'aire $\mathscr{A}(x)$ du polygone $\mathscr{P}$ est l'aire du carré $ABCD$ moins l'aire des deux triangles rectangles AHE et FCG (qui sont identiques).
   $\mathscr{A}(AHE) = \dfrac{x(10-x)}{2}$.
   On en déduit que : $\mathscr{A}(x) = 100 - 2 \times \dfrac{x(10-x)}{2} = \boxed{100 - x(10-x)}$

2. $A(x) = 75 \Leftrightarrow 100 - x(10-x) = 75 \Leftrightarrow 100 - 10x + x^2 = 75 \Leftrightarrow 25 - 10x + x^2 = 0 \Leftrightarrow (5-x)^2 = 0 \Leftrightarrow \boxed{x = 5}$.

   $\dfrac{3}{4} \times 100 = 75.$
   l'aire $\mathscr{A}(x)$ est égale aux trois quarts de l'aire du carré $ABCD$ si $\mathscr{A}(x) = 75$ qui est l'équation résolue à la question. Précédente.
   Il faut que E est le milieu de $[AB]$.