Trigonométrie

Table des matières

I Radian

Définition

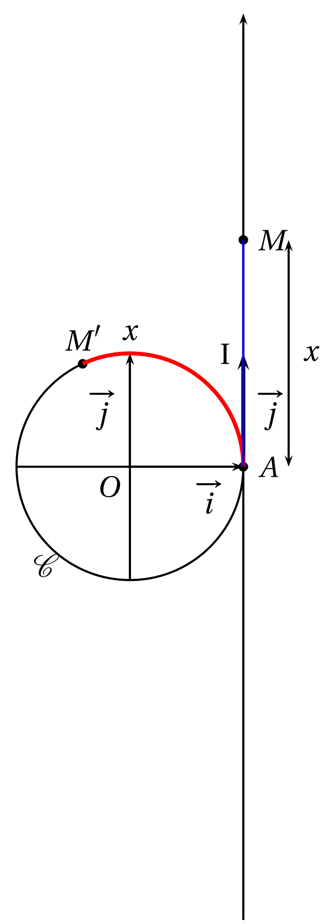
On appelle cercle trigonométrique le cercle de centre O et de rayon 1 unité.

Soit $\mathscr{C}$ un cercle trigonométrique, muni d'un repère orthonormal $\left(O\,;\,\overrightarrow{i}\,;\,\overrightarrow{j}\right)$.
Soit A le point tel que $\overrightarrow{i} = \overrightarrow{OA}$ et $\mathscr{D}$ la droite tangente au cercle $\mathscr{C}$ passant par $\mathscr{D}$.
Soit I le point de la droite $\mathscr{D}$ tel que AI = 1 (I au-dessus de A).
On définit ainsi un repère sur $\mathscr{D}$.

On enroule la droite $\mathscr{D}$ autour du cercle $\mathscr{C}$, la demi-droite supérieure s'enroulant dans le sens inverse de rotation des aiguilles d'une montre, qu'on appelle aussi **sens direct** ou sens **trigonométrique**.
Soit M un point quelconque de $\mathscr{D}$; il vient se placer après enroulement en M'.
La longueur du segment $[AM]$ sur $\mathscr{D}$ est alors égale à longueur de l'arc de cercle $\overset{\frown}{AM'}$
Si $AM = x$, la longueur de l'arc de cercle $\overset{\frown}{AM'}$ mesure aussi x unités et l'angle au centre correspondant $\widehat{AOM}$ mesure x radians.

Définition

1 radian est donc la mesure de l'angle au centre d'un arc de cercle de longueur 1 unité.



Remarque : quand on parcourt un tour de cercle complet de longueur 2π (périmètre du cercle), l'angle au centre correspondant mesure donc **2π radians**.
Par conséquent, on a la correspondance : 360°= 2π radians.

Par proportionnalité, on a la correspondance entre degrés et radians :

Angle en °	0°	30 °	45°	60°	90°
Angle en radians	0 rad	$\frac{\pi}{6}$ rad	$\frac{\pi}{4}$ rad	$\frac{\pi}{3}$ rad	$\frac{\pi}{2}$ rad

Remarques :

- la droite $\mathscr{D}$ étant illimitée, quand on l'enroule autour du cercle, elle décrit une infinité de tours de cercle.
- Tous les points de $\mathscr{D}$ espacés d'une longueur égale à 2π se retrouvent au même endroit sur le cercle trigonométrique; à un même point du cercle trigonométrique correspond donc une infinité d'angles, deux mesures consécutives différant de 2π radians.

II Cosinus et sinus d'un angle x, fonctions cos et sin

II.1 Définitions

Soit M un point du cercle trigonométrique muni d'un repère orthonormal $\left(O\,;\,\vec{i}\,;\,\vec{j}\right)$ et soit x une mesure en radians de l'angle $\widehat{AOM}$.

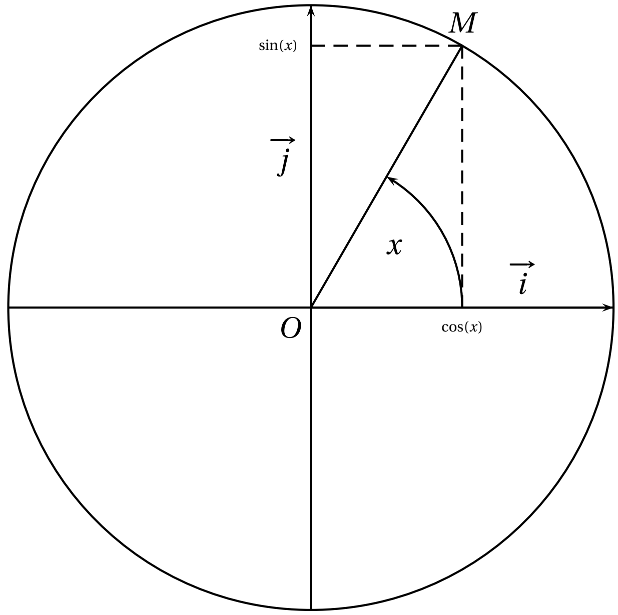
Définition

On appelle cosinus de x et sinus de x les coordonnées du point M dans le repère $\left(O\,;\,\vec{i}\,;\,\vec{j}\right)$.
On note : $M(\cos(x)\,;\,\sin(x))$.
On appelle cosinus, notée cos, la fonction $x \mapsto \cos(x) = \cos x$ et sinus, notée sin, la fonction
$x \mapsto \sin(x) = \cos x$

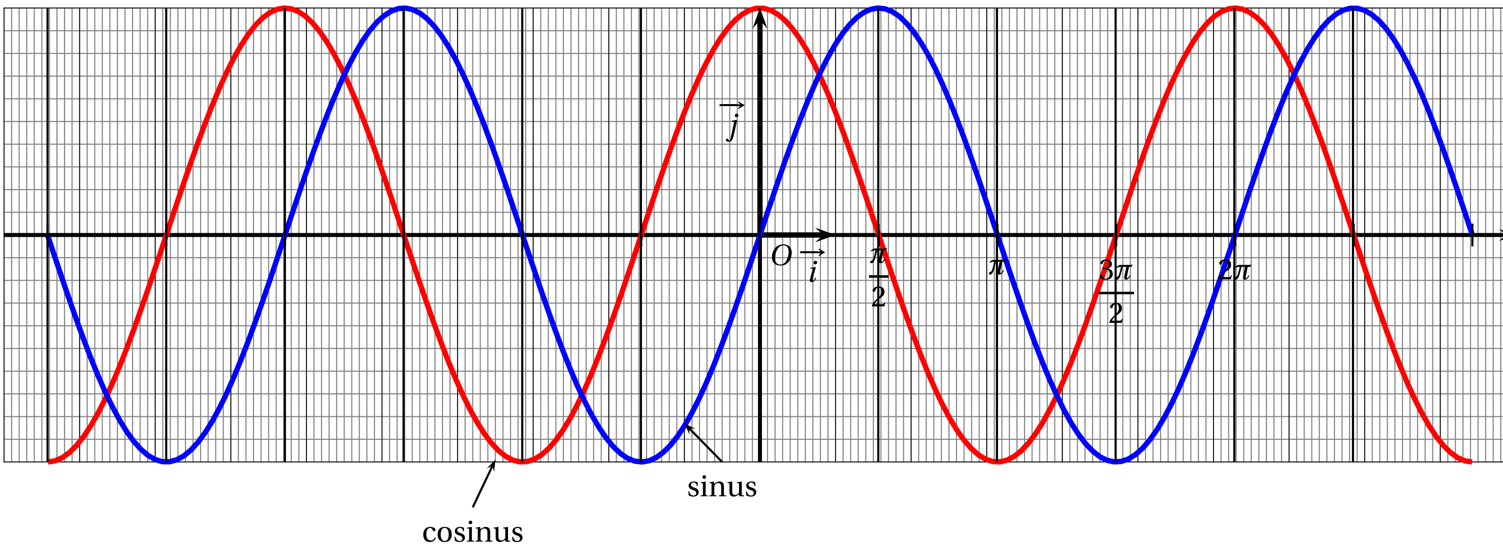
Remarques :

À chaque point M du cercle correspondent plusieurs angles; en effet, quand on enroule la droite $\mathscr{D}$ autour du cercle $\mathscr{C}$, des points viennent se superposer, espacés d'une longueur sur la droite de 2π; les angles diffèrent donc de 2π.
Si x est une mesure de l'angle en radians, $x + 2\pi$ aussi et plus généralement $x + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

On écrit souvent $\cos x$ et $\sin x$ à la place de $\cos(x)$ et $\sin(x)$.
On a donc $\cos(x + 2\pi) = \cos x$ et $\sin(x + 2\pi) = \sin x$ pour tout x réel.
On dit que les fonctions cos et sin sont **périodiques**, de période 2π.

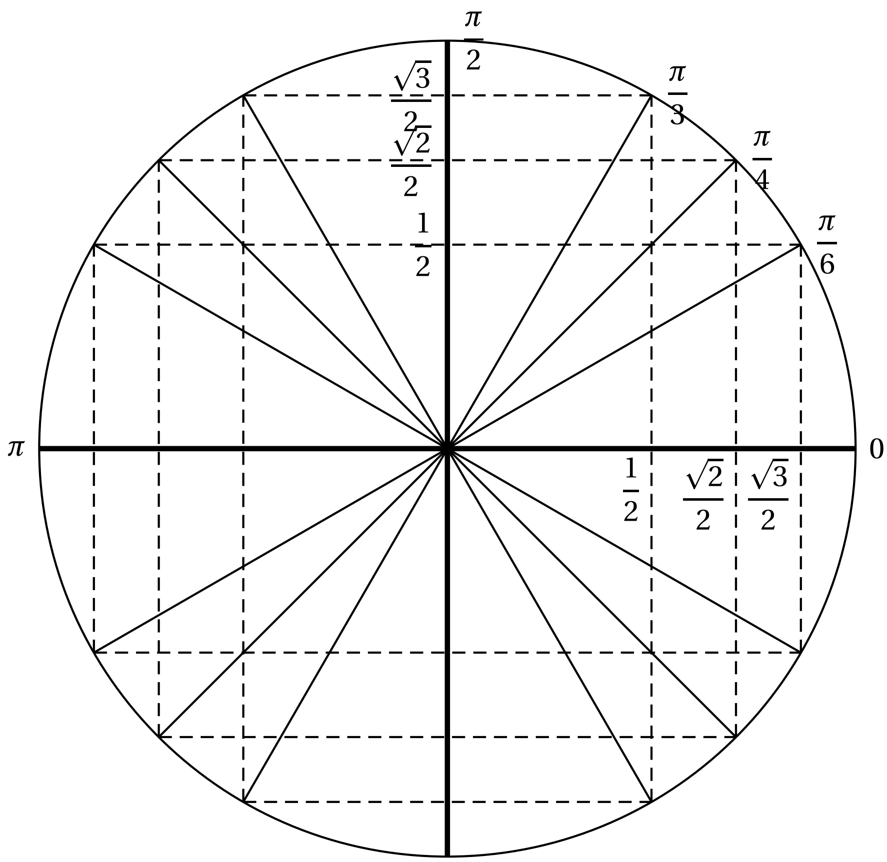


Courbes représentatives des fonctions cos et sin.



Remarque : les deux courbes ont la même allure : la courbe représentative de la fonction sin est celle de la fonction cos, transplantée de $\frac{\pi}{2}\vec{i}$, car $\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=\cos x$.

II.2 Cercle trigonométrique



III Propriétés élémentaires

Pour tout $x \in \mathbb{R}$:

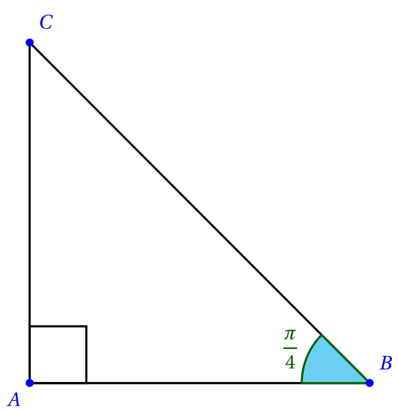
- $-1 \leq \cos x \leq 1$
- $-1 \leq \sin x \leq 1$ (abscisse et ordonnée d'un point du cercle trigonométrique)
- $\cos(x+2k\pi) = \cos x$ ($k \in \mathbb{Z}$)
- $\sin(x+2k\pi) = \sin x$ ($k \in \mathbb{Z}$)
- $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ car $OM^2 = 1^2 = 1$
- $\cos(-x) = \cos(x)$ (par symétrie par rapport à l'axe des abscisses)
- $\sin(-x) = \sin(x)$ (par symétrie par rapport à l'axe des abscisses)
- $\sin(\pi - x) = \sin(x)$ (par symétrie par rapport à l'axe des ordonnées)
- $\cos(\pi - x) = -\cos(x)$ (par symétrie par rapport à l'axe des ordonnées)
- $\cos(x+\pi) = -\cos(x)$ (par symétrie par rapport à O)
- $\sin(x+\pi) = -\sin(x)$ (par symétrie par rapport à O)
- $\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin(x)$ (par symétrie par rapport à la première bissectrice)
- $\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos(x)$ (par symétrie par rapport à la première bissectrice)
- $\sin'(x) = \cos(x) = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$
- $\cos'(x) = -\sin(x) = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$
- $\tan(x) = \dfrac{\sin(x)}{\cos(x)}$ (plus au programme de Terminale)

$\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos x$ explique le « déphasage » de $\frac{\pi}{2}$ entre les deux courbes

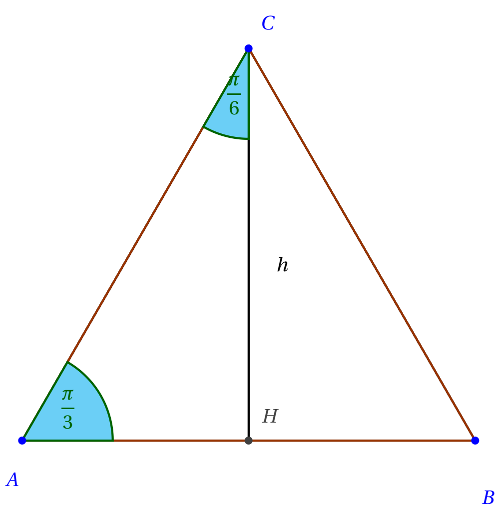
Lignes trigonométriques des angles particuliers

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin(x)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos(x)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\tan(x)$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	non définie

Pour trouver ces valeurs, on utilise un triangle isocèle rectangle pour avoir « naturellement » un angle égal à $\frac{\pi}{4}$ et un triangle équilatéral coupé en deux par une hauteur pour avoir « naturellement » des angles de $\frac{\pi}{3}$ et $\frac{\pi}{6}$.



ABC est un triangle rectangle; les côtés adjacents à l'angle droit mesurent une unité. D'après le théorie de Pythagore, l'hypoténuse mesure $\sqrt{2}$.
Les deux angles aigus mesurent $\frac{\pi}{4}$.
On a alors :
$\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)=\cos\left(\widehat{ABC}\right)=\frac{BA}{BC}=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{1\times\sqrt{2}}{\sqrt{2}\times\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$.
$\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)=\sin\left(\widehat{ABC}\right)=\frac{AC}{BC}=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$.



On considère un triangle ABC de côté 1 ; on note H le pied de la hauteur issue de A
Comme ABC est équilatéral, la hauteur $[CH]$ est aussi médiane et bissectrice.
Le triangle AHC est donc rectangle; $AH=\frac{1}{2}$; $AC=1$ et, d'après le théorème de Pythagore, :
$CH=\sqrt{AC^2-AH^2}=\sqrt{1-\left(\frac{1}{2}\right)^2}=\sqrt{\frac{3}{4}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$.
Les angles aigus du triangle AHC valent $\frac{\pi}{3}$ et $\frac{\pi}{6}$.

- $\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)=\cos\left(\widehat{CAH}\right)=\frac{AH}{AC}=\frac{1}{2}$
- $\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)=\sin\left(\widehat{CAH}\right)=\frac{CH}{AC}=\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{1}=\frac{\sqrt{3}}{2}$
- $\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{CH}{AC}=\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)$
- $\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{CH}{AC}=\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)$

III.1 Dérivée de $\cos(u)$ et de $\sin(u)$

D'après la formule de dérivation des fonctions composées, on a :

$$\boxed{\begin{array}{l}(\cos(u))' = -u'\sin(u)\\ \\ (\sin(u))' = u'\cos(u).\end{array}}$$

Exemples :

1. $f(x) = \cos(2x+3)$; $f = \cos(u)$ avec $u(x) = 2x+3$.
   $f' = -u'\sin(u)$ avec $u'(x) = 2$ donc $f'(x) = -2\sin(2x+3)$.
2. $f(x) = \sin\left(x^2\right)$; $f = \sin(u)$ avec $u(x) = x^2$.
   $f' = u'\cos(u)$ avec $u'(x) = 2x$ donc $f'(x) = 2x\cos\left(x^2\right)$.

IV Complément hors-programme : pour les futurs élèves de CGPE

IV.1 Utilisation de l'exponentielle complexe pour trouver des formules trigonométriques

Rappel : $\boxed{\text{Pour tout } x \in \mathbb{R},\ \mathrm{e}^{\mathrm{i}x} = \cos x + \mathrm{i}\sin x}$

- **Lignes trigonométriques de $x + \dfrac{\pi}{2}$:**

  $\cos\left(x+\dfrac{\pi}{2}\right)+\mathrm{i}\sin\left(x+\dfrac{\pi}{2}\right) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\frac{\pi}{2}+x\right)} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} = \mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} = \mathrm{i}(\cos x + \mathrm{i}\sin x) = -\sin x + \mathrm{i}\cos x.$

  On en déduit : $\begin{cases} \cos\left(x+\dfrac{\pi}{2}\right) = -\sin x \\ \\ \sin\left(x+\dfrac{\pi}{2}\right) = \cos x \end{cases}$ en identifiant parties réelles et imaginaires.

- **Lignes trigonométriques de $\dfrac{\pi}{2} - x$:**

  $\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)+\mathrm{i}\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\frac{\pi}{2}-x\right)} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x} = \mathrm{i}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x} = \mathrm{i}(\cos x - \mathrm{i}\sin x) = \sin x + \mathrm{i}\cos x.$

  On en déduit : $\begin{cases} \cos\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right) = \sin x \\ \\ \sin\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right) = \cos x \end{cases}$ en identifiant parties réelles et imaginaires.

- **Lignes trigonométriques de $\pi - x$:**

  $\cos(\pi - x) + \mathrm{i}\sin(\pi - x) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\pi - x)} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x} = -(\cos x - \mathrm{i}\sin x) = -\cos x + \mathrm{i}\sin x.$

  On en déduit : $\begin{cases} \cos(\pi - x) = -\cos x \\ \\ \sin(\pi - x) = \sin x \end{cases}$ en identifiant parties réelles et imaginaires.

- **Lignes trigonométriques de $\pi + x$:**

  $\cos(\pi + x) + \mathrm{i}\sin(\pi + x) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\pi + x)} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi}\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} = -(\cos x + \mathrm{i}\sin x) = -\cos x - \mathrm{i}\sin x.$

  On en déduit : $\begin{cases} \cos(\pi + x) = -\cos x \\ \\ \sin(\pi + x) = -\sin x \end{cases}$ en identifiant parties réelles et imaginaires.

Formule de Moivre (1707) (Abraham De Moivre (mathématicien français, 1667-1754))

$\forall x \in \mathbb{R},\ \boxed{\cos(nx) + \mathrm{i}\sin(nx) = (\cos x + \mathrm{i}\sin x)^n}.$

Justification : $\cos(nx) + \mathrm{i}\sin(nx) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}nx} = \left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}\right)^n = (\cos x + \mathrm{i}\sin x)^n.$

Exemples d'application :

- $n = 2$: $\cos(2x) + \mathrm{i}\sin(2x) = (\cos x + \mathrm{i}\sin x)^2 = \cos^2 x - \sin^2 x + 2\mathrm{i}\cos x \sin x$ d'où $\begin{cases} \cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x \\ \sin(2x) = 2\cos x \sin x \end{cases}.$

- $n = 3$: $\cos(3x) + \mathrm{i}\sin(3x) = (\cos x + \mathrm{i}\sin x)^3 = \cos^3 x + 3\cos^2 x \times \mathrm{i}\sin x + 3\cos x \times \mathrm{i}^2\sin^2 x + \mathrm{i}^3\sin^3 x$
  $= \cos^3 x - 3\cos x\sin^2 x + \mathrm{i}\left[3\cos^2 x\sin x - \sin^3 x\right].$

  On en déduit :

  $\begin{cases} \cos(3x) = \cos^3 x - 3\cos x\left(1 - \cos^2 x\right) = \boxed{4\cos^3 - 3\cos x} \text{ (en utilisant } \cos^2 x + \sin^2 x = 1) \\ \sin(3x) = 3\cos^2 x\sin x - \sin^3 x = 3\left(1 - \cos^2 x\right)\sin x - \sin^3 x = \boxed{3\sin x - 4\sin^3 x} \end{cases}.$

Pour les autres valeurs de n, même méthode en utilisant la formule du binôme de Newton :

$$(a+b)^n = a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} b^1 + \binom{n}{2} a^{n-2} b^2 + \cdots + \binom{n}{k} a^{n-k} b^k + \cdots + b^n.$$

Formules de linéarisation (permettant de calculer des intégrales)

On a : $e^{ix} = \cos x + i \sin x$ et $e^{-ix} = \overline{e^{ix}} = \cos x - i \sin x$.

On en déduit : $\cos x = \dfrac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$ et $\sin x = \dfrac{e^{ix} - i - ix}{2i}$.

Alors :

- $\cos^2 x = \left(\dfrac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}\right)^2 = \dfrac{\left(e^{ix}\right)^2 + 2 + \left(e^{-ix}\right)^2}{4} = \dfrac{e^{2ix} + e^{-2ix} + 2}{4} = \dfrac{2\cos(2x) + 2}{4} = \boxed{\dfrac{1 + \cos(2x)}{2}}$.
- $\sin^2 x = \left(\dfrac{e^{ix} - e^{-ix}}{2}\right)^2 = \dfrac{\left(e^{ix}\right)^2 - 2 + \left(e^{-ix}\right)^2}{-4} = \dfrac{e^{2ix} + e^{-2ix} - 2}{-4} = \dfrac{2\cos(2x) - 2}{-4} = \boxed{\dfrac{1 - \cos(2x)}{2}}$.
- $\cos^3 x = \left(\dfrac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}\right)^3 = \dfrac{\left(e^{ix}\right)^3 + 3\left(e^{ix}\right)^2 e^{-ix} + 3e^{ix}\left(e^{-ix}\right)^2 + \left(e^{-ix}\right)^3}{8} = \dfrac{e^{3ix} + 3e^{2ix}e^{-ix} + 3e^{ix}e^{-2ix} + e^{-3ix}}{8}$
  $= \dfrac{e^{3ix} + e^{-3ix} + 3\left[e^{ix} + e^{-ix}\right]}{8} = \dfrac{2\cos(3x) + 6\cos x}{8} = \boxed{\dfrac{\cos(3x) + 3\cos x}{4}}$
- $\sin^3 x = \left(\dfrac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}\right)^3 = \dfrac{\left(e^{ix}\right)^3 - 3\left(e^{ix}\right)^2 e^{-ix} + 3e^{ix}\left(e^{-ix}\right)^2 - \left(e^{-ix}\right)^3}{-8i} = \dfrac{e^{3ix} - 3e^{2ix}e^{-ix} + 3e^{ix}e^{-2ix} - e^{-3ix}}{-8i}$
  $= \dfrac{e^{3ix} - e^{-3ix} + 3\left[e^{ix} - e^{-ix}\right]}{-8i} = \dfrac{-2i\cos(3x) + 6i\sin x}{-8i} = \boxed{\dfrac{-\sin(3x) + 3\sin x}{4}}$
- La méthode se généralise « facilement » aux valeurs ne n suivantes, en regroupant $e^{ip\theta}$ avec $e^{-ip\theta}$, mais les calculs deviennent un peu compliqués !
  Heureusement, il y a désormais des logiciels de calcul formel qui font désormais les calculs. (exemple xcas qui peut s'utiliser en ligne)