

## Exercices de baccalauréat

### I Exercice sujet 1 Bac 2021

La suite  $(u_n)$  est définie sur  $\mathbb{N}$  par  $u_0 = 1$  et pour tout entier naturel  $n$ ,

$$u_{n+1} = \frac{3}{4}u_n + \frac{1}{4}n + 1.$$

- Calculer, en détaillant les calculs,  $u_1$  et  $u_2$  sous forme de fraction irréductible.

L'extrait, reproduit ci-dessous, d'une feuille de calcul réalisée avec un tableur présente les valeurs des premiers termes de la suite  $(u_n)$ .

	A	B
1	$n$	$u_n$
2	0	1
3	1	1,75
4	2	2,562 5
5	3	3,421 875
6	4	4,316 406 25

- Quelle formule, étirée ensuite vers le bas, peut-on écrire dans la cellule B3 de la feuille de calcul pour obtenir les termes successifs de  $(u_n)$  dans la colonne B?
  - Conjecturer le sens de variation de la suite  $(u_n)$ .
- Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel  $n$ , on a :  $n \leq u_n \leq n + 1$ .
  - En déduire, en justifiant la réponse, le sens de variation et la limite de la suite  $(u_n)$ .
  - Démontrer que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{n} = 1.$$

- On désigne par  $(v_n)$  la suite définie sur  $\mathbb{N}$  par

$$v_n = u_n - n$$

- Démontrer que la suite  $(v_n)$  est géométrique de raison  $\frac{3}{4}$ .
- En déduire que, pour tout entier naturel  $n$ , on a :

$$u_n = \left(\frac{3}{4}\right)^n + n.$$

### II Exercice Bac Asie juin 2025

Un patient doit prendre toutes les heures une dose de 2 mL d'un médicament.

On introduit la suite  $(u_n)$  telle que le terme  $u_n$  représente la quantité de médicament, exprimée en mL présente dans l'organisme immédiatement après  $n$  prises de médicament.

On a  $u_1 = 2$  et pour tout entier naturel  $n$  strictement positif :  $u_{n+1} = 2 + 0,8u_n$ .

### Partie A

En utilisant ce modèle, un médecin cherche à savoir à partir de combien de prises du médicament la quantité présente dans l'organisme du patient est strictement supérieure à 9 mL.

- Calculer la valeur  $u_2$ .
- Montrer par récurrence que :

$$u_n = 10 - 8 \times 0,8^{n-1} \text{ pour tout } n > 0.$$

- Déterminer  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$  et donner une interprétation de ce résultat dans le contexte de l'exercice.
- Soit  $N$  un entier naturel strictement positif, l'inéquation  $u_N \geq 10$  admet-elle des solutions? Interpréter le résultat de cette question dans le contexte de l'exercice.
- Déterminer à partir de combien de prises de médicament la quantité de médicament présente dans l'organisme du patient est strictement supérieure à 9 mL. Justifier votre démarche.

### Partie B

En utilisant la même modélisation, le médecin s'intéresse à la quantité moyenne de médicament présente dans l'organisme du malade au cours du temps.

On définit pour cela la suite  $(S_n)$  définie pour tout entier naturel  $n$  strictement positif par

$$S_n = \frac{u_1 + u_2 + \dots + u_n}{n}.$$

On admet que la suite  $(S_n)$  est croissante.

- Calculer  $S_2$ .
- Montrer que pour tout entier naturel  $n$  strictement positif,

$$u_1 + u_2 + \dots + u_n = 10n - 40 + 40 \times 0,8^n.$$

- Calculer  $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$ .
- On donne la fonction mystère suivante, écrite en langage Python :

```

1 def mystere(k) :
2     n = 1
3     s = 2
4     while s < k :
5         n = n + 1
6         s = 10 - 40/n + (40*0.8**n)/n
7     return n
    
```

Dans le contexte de l'énoncé, que représente la valeur renvoyée par la saisie `mystere(9)` ?

- Justifier que cette valeur est strictement supérieure à 10.