

Exercices sur la dérivation

I

On pose $f(x) = x^3 - x - 1$, où $x \in \mathbb{R}$.

1. Pour tout réel x , calculer $f'(x)$.
2. Déterminer l'équation réduite de la tangente à la courbe représentative \mathcal{C}_f de f au point d'abscisse 2.

II

On pose $f(x) = \frac{1}{4x-1}$, où $x \in \left] \frac{1}{4}; +\infty \right[$.

1. Pour tout $x > \frac{1}{4}$, calculer $f'(x)$.
2. Montrer que l'équation réduite de la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse $\frac{3}{4}$ est $y = -x + \frac{5}{4}$.

III

Pour chacune des fonctions suivantes, calculer l'expression de $f'(x)$, étudier le signe de $f'(x)$ puis en déduire les variations de f .

- a) Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par : $f(x) = x^3 - 3x$.
- b) Soit f la fonction définie sur \mathbb{R}^* par : $f(x) = -x + \frac{3}{x}$.
- c) Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-5\}$ par : $f(x) = \frac{2x-5}{x+5}$.
- d) Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par :

$$f(x) = \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{4}x^2 - x + \frac{1}{12}.$$

IV

On pose $f(t) = \frac{t}{2} + \frac{2}{t}$, $t \neq 0$.

1. Calculer $f'(t)$.
2. En déduire les variations de f sur \mathbb{R}^* .

V

On modélise la concentration dans le sang, en microgramme par litre ($\mu\text{g.L}^{-1}$) d'un anesthésiant, t heures après son administration par la fonction

$$f : t \mapsto \frac{20}{0,005t^2 + 0,1t + 1}$$

où $t \in [0; 36]$.

1. Calculer $f'(t)$ où $t \in [0; 36]$.
2. En déduire le sens de variation de f et interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.
3. On estime qu'un patient auquel on a administré cet anesthésiant peut rentrer chez lui quand la concentration du médicament est inférieure à 10 % de sa concentration au moment de son administration. Après combien d'heures ce patient pourra-t-il rentrer chez lui?

VI

On considère la fonction f définie sur \mathbb{R}^* par $f(x) = \frac{1}{x}$.

On note f' la dérivée de f , f'' la dérivée seconde de f , définie par $f'' = (f')'$ (dérivée de f') puis $f^{(3)} = (f'')'$ et plus généralement $f^{(n)} = (f^{(n-1)})'$.

1. Calculer $f'(x)$.
2. Calculer $f''(x)$, puis $f^{(3)}(x)$, $f^{(4)}(x)$, $f^{(5)}(x)$.
3. Émettre une conjecture sur l'expression de $f^{(n)}(x)$ puis démontrer celle-ci.

VII

On considère une entreprise qui produit du jus de fruits. Sa capacité quotidienne de production est égale à 600 L, et, pour x hL de jus de fruits, le coût total de production quotidien est donné, en dizaines d'euros par

$$C(x) = \frac{1}{2}x^3 - 3x^2 + 7x + 50$$

où $x \in [0; 6]$.

1. Vérifier que $C(0) \neq 0$. Donner une explication concrète de ce fait.
2. (a) Quelle conjecture peut-on formuler sans calcul sur le sens de variation de C sur $[0; 6]$? Expliquer.
(b) Prouver cette conjecture par le calcul.
3. Le coût moyen de fabrication de x hL, si x hL ont déjà été produits, avec $x > 0$, est défini par

$$C_M(x) = \frac{C(x)}{x}.$$

- (a) Montrer que, pour tout x dans $]0; 6]$, on a :

$$C'_M(x) = \frac{(x-5)(x^2 - 2x + 10)}{x^2}$$

- (b) En déduire la quantité de production pour laquelle le coût moyen est minimal et préciser ce coût en euro.
- (c) En sciences économiques, on appelle coût marginal le coût de production d'une unité supplémentaire. Ce coût, qui dépend de la quantité x déjà produite, est modélisé par la fonction C' , dérivée de C . Montrer que lorsque le coût moyen est minimal, il est égal au coût marginal.