

Exercices de baccalauréat sur la fonction logarithme

I Centres étrangers mai 2022 sujet 2

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]0; +\infty[$ par

$$f(x) = x \ln(x) + 1$$

On note \mathcal{C}_f sa courbe représentative dans un repère du plan.

- Déterminer la limite de la fonction f en 0 ainsi que sa limite en $+\infty$.
- (a) On admet que f est dérivable sur $]0; +\infty[$ et on notera f' sa fonction dérivée.

Montrer que pour tout réel x strictement positif :

$$f'(x) = 1 + \ln(x).$$

- (b) En déduire le tableau de variation de la fonction f sur $]0; +\infty[$. On y fera figurer la valeur exacte de l'extremum de f sur $]0; +\infty[$ et les limites.
- (c) Justifier que pour tout $x \in]0; 1[$, $f(x) \in]0; 1[$.
- (a) Déterminer une équation de la tangente (T) à la courbe \mathcal{C}_f au point d'abscisse 1.
- (b) Étudier la convexité de la fonction f sur $]0; +\infty[$.
- (c) En déduire que pour tout réel x strictement positif :

$$f(x) \geq x$$

- On définit la suite (u_n) par son premier terme u_0 élément de l'intervalle $]0; 1[$ et pour tout entier naturel n :

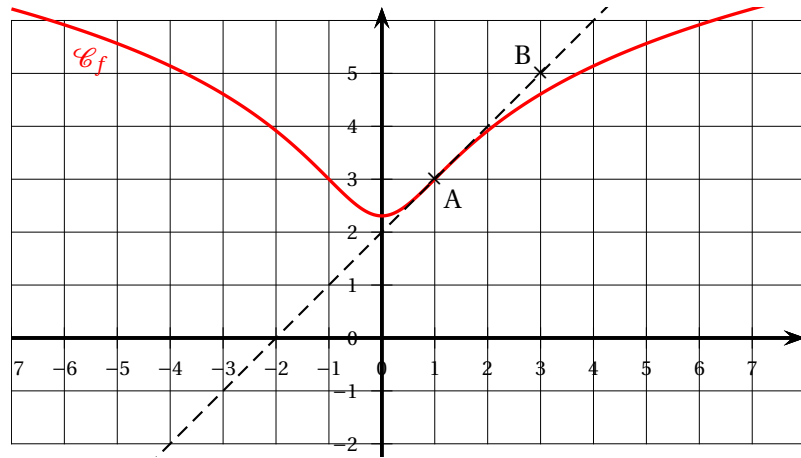
$$u_{n+1} = f(u_n)$$

- (a) Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n , on a : $0 < u_n < 1$.
- (b) Déduire de la question 3. c. la croissance de la suite (u_n) .
- (c) En déduire que la suite (u_n) est convergente.

II Asie mai 2022 sujet 1

Soit f une fonction définie et dérivable sur \mathbb{R} . On considère les points $A(1; 3)$ et $B(3; 5)$.

On donne ci-dessous \mathcal{C}_f la courbe représentative de f dans un repère orthogonal du plan, ainsi que la tangente (AB) à la courbe \mathcal{C}_f au point A .



Les trois parties de l'exercice peuvent être traitées de manière indépendante.

Partie A

- Déterminer graphiquement les valeurs de $f(1)$ et $f'(1)$.
- La fonction f est définie par l'expression $f(x) = \ln(ax^2 + 1) + b$, où a et b sont des nombres réels positifs.
 - Déterminer l'expression de $f'(x)$.
 - Déterminer les valeurs de a et b à l'aide des résultats précédents.

Partie B

On admet que la fonction f est définie sur \mathbb{R} par

$$f(x) = \ln(x^2 + 1) + 3 - \ln(2).$$

- Montrer que f est une fonction paire.
- Déterminer les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$.
- Déterminer l'expression de $f'(x)$. Étudier le sens de variation de la fonction f sur \mathbb{R} . Dresser le tableau des variations de f en y faisant figurer la valeur exacte du minimum ainsi que les limites de f en $-\infty$ et $+\infty$.
- À l'aide du tableau des variations de f , donner les valeurs du réel k pour lesquelles l'équation $f(x) = k$ admet deux solutions.
- Résoudre l'équation $f(x) = 3 + \ln 2$.

Partie C

On rappelle que la fonction f est définie sur \mathbb{R} par $f(x) = \ln(x^2 + 1) + 3 - \ln(2)$.

1. Conjecturer, par lecture graphique, les abscisses des éventuels points d'inflexion de la courbe \mathcal{C}_f .
2. Montrer que, pour tout nombre réel x , on a : $f''(x) = \frac{2(1-x^2)}{(x^2+1)^2}$.
3. En déduire le plus grand intervalle sur lequel la fonction f est convexe.

III Antilles-Guyane juin 2017

Dans tout l'exercice, n désigne un entier naturel strictement positif. Le but de l'exercice est d'étudier l'équation

$$(E_n) : \frac{\ln(x)}{x} = \frac{1}{n}$$

ayant pour inconnue le nombre réel strictement positif x .

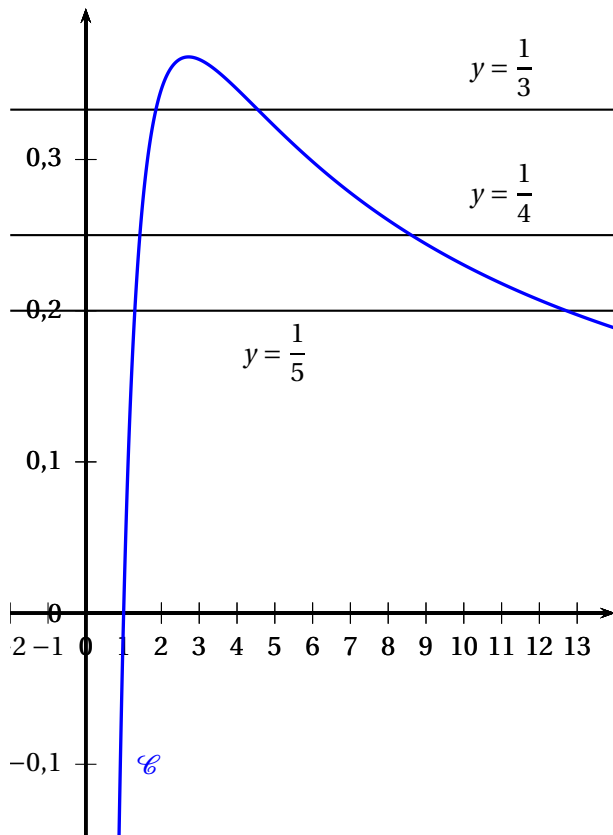
Partie A

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]0; +\infty[$ par

$$f(x) = \frac{\ln(x)}{x}.$$

On admet que la fonction f est dérivable sur l'intervalle $]0; +\infty[$.

On donne ci-dessous la courbe représentative \mathcal{C}_f de la fonction f dans un repère orthogonal.



1. Étudier les variations de la fonction f .
2. Déterminer son maximum.

Partie B

1. Montrer que, pour $n \geq 3$, l'équation $f(x) = \frac{1}{n}$ possède une unique solution sur $[1; e]$ notée α_n .
2. D'après ce qui précède, pour tout entier $n \geq 3$, le nombre réel α_n est solution de l'équation (E_n) .
 - (a) Sur le graphique sont tracées les droites D_3 , D_4 et D_5 d'équations respectives :
 $y = \frac{1}{3}$, $y = \frac{1}{4}$, $y = \frac{1}{5}$.
Conjecturer le sens de variation de la suite (α_n) .
 - (b) Comparer, pour tout entier $n \geq 3$, $f(\alpha_n)$ et $f(\alpha_{n+1})$.
Déterminer le sens de variation de la suite (α_n) .
 - (c) En déduire que la suite (α_n) converge.
Il n'est pas demandé de calculer sa limite.
3. On admet que, pour tout entier $n \geq 3$, l'équation (E_n) possède une autre solution β_n telle que

$$1 \leq \alpha_n \leq e \leq \beta_n.$$

- (a) On admet que la suite (β_n) est croissante.
Établir que, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 3,

$$\beta_n \geq n \frac{\beta_3}{3}.$$

- (b) En déduire la limite de la suite (β_n) .