

Exercices sur les intégrales

I

La suite (I_n) est définie sur \mathbb{N} par :

$$I_n = \int_0^1 (1 + t^n) dt.$$

1. Prouver que la suite (I_n) est décroissante.
2. Est-elle convergente?

II

Pour tout entier naturel non nul n , on pose :

$$I_n = \int_n^{n+1} \frac{1}{x} dx.$$

1. Démontrer que $\frac{1}{n+1} \leq I_n \leq \frac{1}{n}$.
2. La suite (I_n) est-elle convergente?
3. On pose, pour tout entier naturel non nul n :

$$u_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}.$$

Montrer que la suite (u_n) diverge vers $+\infty$.

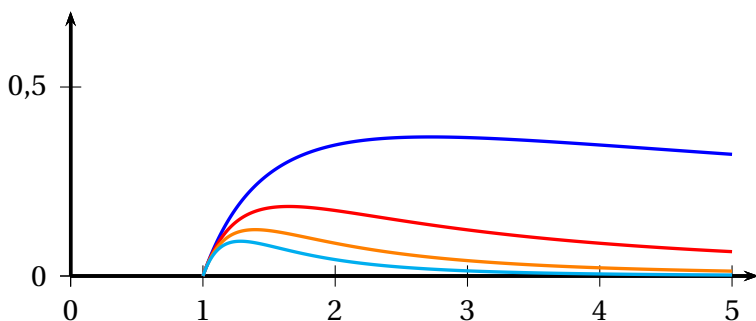
III Liban mai 2018

On considère, pour tout entier $n > 0$, les fonctions f_n définies sur l'intervalle $[1; 5]$ par :

$$f_n(x) = \frac{\ln x}{x^n}.$$

. Pour tout entier $n > 0$, on note \mathcal{C}_n la courbe représentative de la fonction f_n dans un repère orthogonal.

Sur le graphique ci-dessous sont représentées les courbes \mathcal{C}_n pour n appartenant à $\{1; 2; 3; 4\}$.



1. Montrer que, pour tout entier $n > 0$ et tout réel x de l'intervalle $[1; 5]$:

$$f'_n(x) = \frac{1 - n \ln(x)}{x^{n+1}}.$$

2. Pour tout entier $n > 0$, on admet que la fonction f_n admet un maximum sur l'intervalle $[1; 5]$.

On note A_n le point de la courbe \mathcal{C}_n ayant pour ordonnée ce maximum.

Montrer que tous les points A_n appartiennent à une même courbe Γ d'équation

$$y = \frac{1}{e} \ln(x).$$

3. (a) Montrer que, pour tout entier $n > 1$ et tout réel x de l'intervalle $[1; 5]$:

$$0 \leq \frac{\ln(x)}{x^n} \leq \frac{\ln(5)}{x^n}.$$

- (b) Montrer que pour tout entier $n > 1$:

$$\int_1^5 \frac{1}{x^n} dx = \frac{1}{n-1} \left(1 - \frac{1}{5^{n-1}} \right).$$

- (c) Pour tout entier $n > 0$, on s'intéresse à l'aire, exprimée en unités d'aire, de la surface sous la courbe f_n , c'est-à-dire l'aire du domaine du plan délimité par les droites d'équations $x = 1$, $x = 5$, $y = 0$ et la courbe \mathcal{C}_n .

Déterminer la valeur limite de cette aire quand n tend vers $+\infty$.

IV Métropole juin 2014

Partie A

Dans le plan muni d'un repère orthonormé, on désigne par \mathcal{C}_1 la courbe représentative de la fonction f_1 définie sur \mathbb{R} par :

$$f_1(x) = x + e^{-x}.$$

1. Justifier que \mathcal{C}_1 passe par le point A de coordonnées $(0; 1)$.
2. Déterminer le tableau de variation de la fonction f_1 . On précisera les limites de f_1 en $+\infty$ et en $-\infty$.

Partie B

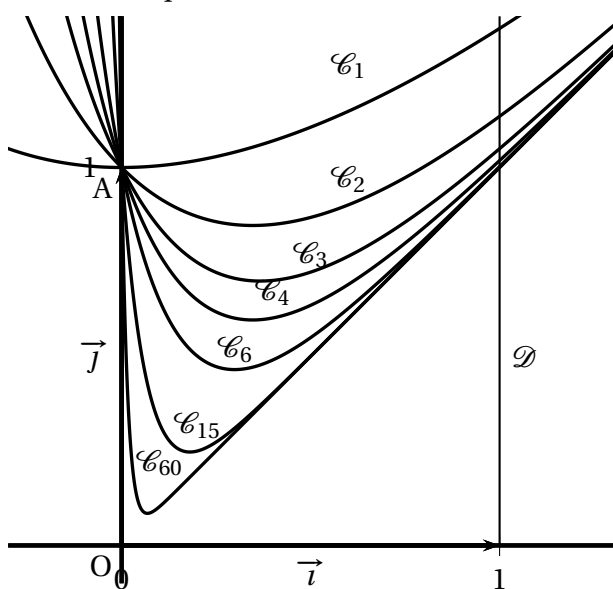
L'objet de cette partie est d'étudier la suite (I_n) définie sur \mathbb{N} par :

$$I_n = \int_0^1 (x + e^{-nx}) dx.$$

1. Dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$, pour tout entier naturel n , on note \mathcal{C}_n la courbe représentative de la fonction f_n définie sur \mathbb{R} par

$$f_n(x) = x + e^{-nx}.$$

Sur le graphique ci-dessous on a tracé la courbe \mathcal{C}_n pour plusieurs valeurs de l'entier n et la droite \mathcal{D} d'équation $x = 1$.



- (a) Interpréter géométriquement l'intégrale I_n .
- (b) En utilisant cette interprétation, formuler une conjecture sur le sens de variation de la suite (I_n) et sa limite éventuelle. On précisera les éléments sur lesquels on s'appuie pour conjecturer.

2. Démontrer que pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1,

$$I_{n+1} - I_n = \int_0^1 e^{-(n+1)x} (1 - e^x) dx.$$

En déduire le signe de $I_{n+1} - I_n$ puis démontrer que la suite (I_n) est convergente.

3. Déterminer l'expression de I_n en fonction de n et déterminer la limite de la suite (I_n) .