

Exercices sur les limites de fonctions

Exercice I

Soit g la fonction définie sur \mathbb{R} par $g(x) = \frac{2-x^2}{x^2+1}$.
La courbe représentative \mathcal{C}_g de g admet-elle une asymptote? Si oui, laquelle?

Exercice II

Déterminer les limites en $-\infty$ et $+\infty$ des fonctions définies par les expressions suivantes :

a) $f(x) = \frac{x^2+2}{1-x}$

b) $g(x) = \frac{x+3}{-2x^2+1}$

Exercice III

Déterminer les limites suivantes :

a) $\lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x > 2}} \frac{x}{3x-6}$

b) $\lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x < 2}} \frac{x}{3x-6}$

c) $\lim_{\substack{x \rightarrow 4 \\ x > 4}} \frac{x^2}{4-x}$

d) $\lim_{\substack{x \rightarrow 4 \\ x < 4}} \frac{x^2}{4-x}$

e) $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} \left(4 + \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2}\right)$

f) $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \left(4 + \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2}\right)$

Exercice IV

On définit la fonction f par $f(x) = \frac{3x+1}{5-x}$.
On note \mathcal{C} la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

- 1) Donner l'ensemble de définition de f .
- 2) Étudier les limites de f aux bornes de l'ensemble de définition de f .
Donner l'équation des asymptotes horizontales et verticales éventuelles.
- 3) Déterminer la position relative de la courbe \mathcal{C} avec la droite d'équation $y = -3$.

Exercice V

On définit la fonction f par $f(x) = \frac{2x^2-3x-1}{x-1}$.
On appelle \mathcal{C} la courbe représentative de f dans le repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$ d'unité 1 cm.

- 1) Donner l'ensemble de définition \mathcal{D} de f .
- 2) Étudier les limites aux bornes de l'ensemble de définition de f .
Donner l'équation des asymptotes horizontales et verticales éventuelles.
- 3) a) Montrer que, pour tout $x \in \mathcal{D}$,

$$f(x) = 2x - 1 - \frac{2}{x-1}.$$

- b) En déduire les limites en $+\infty$ et $-\infty$ de la fonction d définie par : $d(x) = f(x) - (2x - 1)$.
Remarque : on peut alors en déduire que la droite Δ d'équation $y = 2 - 1$ est asymptote à la courbe \mathcal{C} en $+\infty$ et en $-\infty$.
- c) Étudier la position de la droite Δ par rapport à la courbe \mathcal{C} .
- 4) Étudier les variations de f sur son ensemble de définition \mathcal{D} et dresser le tableau de variation complet de la fonction f .
- 5) Donner une équation de la tangente à la courbe \mathcal{C} en 2.
- 6) Tracer les asymptotes, la tangente en 2 et la courbe \mathcal{C} dans le repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$.