

Exercices sur les équations différentielles

I Quand boire sa tasse de café?

La loi du refroidissement s'énonce ainsi en général :
« La vitesse de refroidissement d'un corps inerte est proportionnelle à la différence de température entre ce corps et la température ambiante. »

1. On note T_0 la température ambiante et T la température à l'instant t du corps considéré. (T est une fonction de t .) Montrer que T vérifie l'équation différentielle : $T' = k(T - T_0)$.
2. Résoudre cette équation différentielle.
3. Dans une pièce où la température est de 20°C , une personne verse du café à 80°C dans une tasse. Deux minutes plus tard, le café est à 60°C .
Au bout de combien de temps la personne pourra-t-elle déguster son café, qu'elle aime consommer à 40°C ?

II Bac : sujet 0 année 2020

Dans une boulangerie, les baguettes sortent du four à une température de 225°C .

On s'intéresse à l'évolution de la température d'une baguette après sa sortie du four.

On admet qu'on peut modéliser cette évolution à l'aide d'une fonction f définie et dérivable sur l'intervalle $[0; +\infty[$.

Dans cette modélisation, $f(t)$ représente la température en degré Celsius de la baguette au bout de la durée t , exprimée en heure, après la sortie du four.

Ainsi, $f(0,5)$ représente la température d'une baguette une demi-heure après la sortie du four.

Dans tout l'exercice, la température ambiante de la boulangerie est maintenue à 25°C .

On admet alors que la fonction f est solution de l'équation différentielle $y' + 6y = 150$.

1. (a) Préciser la valeur de $f(0)$.
(b) Résoudre l'équation différentielle $y' + 6y = 150$.
(c) En déduire que pour tout réel $t \geq 0$, on a

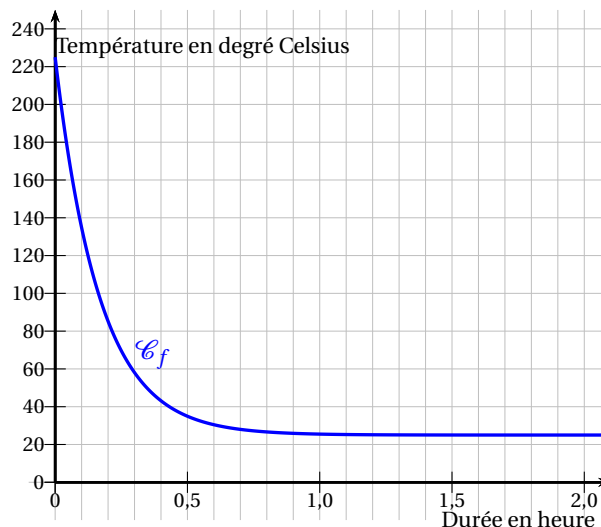
$$f(t) = 200e^{-6t} + 25.$$

2. Par expérience, on observe que la température d'une baguette sortant du four :
— décroît;
— tend à se stabiliser à la température ambiante.
La fonction f fournit-elle un modèle en accord avec ces observations?

3. Montrer que l'équation $f(t) = 40$ admet une unique solution dans $[0; +\infty[$.

Pour mettre les baguettes en rayon, le boulanger attend que leur température soit inférieure ou égale à 40°C . On note \mathcal{T}_0 le temps d'attente minimal entre la sortie du four d'une baguette et sa mise en rayon.

On donne en page suivante la représentation graphique de la fonction f dans un repère orthogonal.



4. Avec la précision permise par le graphique, lire \mathcal{T}_0 . On donnera une valeur approchée de \mathcal{T}_0 sous forme d'un nombre entier de minutes.
5. On s'intéresse ici à la diminution, minute après minute, de la température d'une baguette à sa sortie du four.

Ainsi, pour un entier naturel n , \mathcal{D}_n désigne la diminution de température en degré Celsius d'une baguette entre la n -ième et la $(n+1)$ -ième minute après sa sortie du four.

On admet que, pour tout entier naturel n :

$$\mathcal{D}_n = f\left(\frac{n}{60}\right) - f\left(\frac{n+1}{60}\right).$$

- (a) Vérifier que 19 est une valeur approchée de \mathcal{D}_0 à 0,1 près, et interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.
- (b) Vérifier que l'on a, pour tout entier naturel n :

$$\mathcal{D}_n = 200e^{-0,1n} (1 - e^{-0,1}).$$

En déduire le sens de variation de la suite (\mathcal{D}_n) , puis la limite de la suite (\mathcal{D}_n) .

Ce résultat était-il prévisible dans le contexte de l'exercice?