Exercices sur la convexité

Exercice I

Pour tout réel x, on pose $f(x) = 3x^3 + 3x^2 - 4x + 1$.

1) Pour tout réel x, déterminer $f''(x)$.
2) En déduire les intervalles sur lesquels f est convexe.
3) La courbe représentative de la fonction f possède-t-elle un point d'inflexion ? Si oui, en quelle abscisse ?

Exercice II

On considère la fonction $f : x \mapsto \sqrt{x}$, définie sur $[0\,;\,+\infty[$.

1) Pour tout réel $x > 0$, déterminer une expression de $f'(x)$ et de $f''(x)$.
2) f est-elle convexe ou concave sur $]0\,;\,+\infty[$?
3) Déterminer l'équation de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse 1.
4) En déduire que pour tout réel $x > 0$, $\sqrt{x} \leqslant \dfrac{x}{2} + \dfrac{1}{2}$.
   Représenter graphiquement cette inégalité.

Exercice III

Soit n un entier naturel non nul. On considère la fonction $f : x \mapsto x^n$.

1) La fonction f est-elle convexe ou concave sur $[0\,;\,+\infty[$?
2) En utilisant la tangente à la courbe de f au point d'abscisse 0, montrer que pour tout réel $x \geqslant 0$, $(1+x)^n \geqslant 1 + nx$.
3) Quelle inégalité a-t-on redémontré ?

Exercices sur la convexité

Exercice I

Pour tout réel x, on pose $f(x) = 3x^3 + 3x^2 - 4x + 1$.

1) Pour tout réel x, déterminer $f''(x)$.
2) En déduire les intervalles sur lesquels f est convexe.
3) La courbe représentative de la fonction f possède-t-elle un point d'inflexion ? Si oui, en quelle abscisse ?

Exercice II

On considère la fonction $f : x \mapsto \sqrt{x}$, définie sur $[0\,;\,+\infty[$.

1) Pour tout réel $x > 0$, déterminer une expression de $f'(x)$ et de $f''(x)$.
2) f est-elle convexe ou concave sur $]0\,;\,+\infty[$?
3) Déterminer l'équation de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse 1.
4) En déduire que pour tout réel $x > 0$, $\sqrt{x} \leqslant \dfrac{x}{2} + \dfrac{1}{2}$.
   Représenter graphiquement cette inégalité.

Exercice III

Soit n un entier naturel non nul. On considère la fonction $f : x \mapsto x^n$.

1) La fonction f est-elle convexe ou concave sur $[0\,;\,+\infty[$?
2) En utilisant la tangente à la courbe de f au point d'abscisse 0, montrer que pour tout réel $x \geqslant 0$, $(1+x)^n \geqslant 1 + nx$.
3) Quelle inégalité a-t-on redémontré ?