

Spécialité Terminale : Devoir sur feuille n° 3

Exercice I

Soit la fonction f définie sur \mathbb{R} par :

$$f(x) = (2x - 5)(1 - e^{-x}).$$

Partie A. Soit la fonction g définie sur \mathbb{R} par

$$g(x) = 2e^x + 2x - 7.$$

- Déterminer les limites de g en $-\infty$ et $+\infty$.
- Montrer que la fonction g est croissante sur \mathbb{R} .
- (a) Justifier que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α dans \mathbb{R} .
(b) Montrer que $\alpha \in [0 ; 1]$ puis déterminer une valeur approchée de α à 10^{-3} près à l'aide d'une calculatrice.
- En déduire le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x .

Partie B

- Déterminer les limites de f en $-\infty$ et $+\infty$.
- Déterminer la fonction dérivée f' et montrer que $f'(x) = g(x)e^{-x}$.

3. Déterminer le signe de f' sur \mathbb{R} puis dresser le tableau de variation de la fonction f sur \mathbb{R} .

4. Démontrer que $f(\alpha) = \frac{(2\alpha - 5)^2}{2\alpha - 7}$ puis déduire une valeur approchée de $f(\alpha)$ à 10^{-3} près.

5. Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (2x - 5)]$.
En déduire que la droite \mathcal{D} d'équation $y = 2x - 5$ est asymptote à \mathcal{C}_f en $+\infty$.

Partie C

Pour tout entier naturel $n \geq 3$, on considère les points A_n , B_n et C_n d'abscisse n , appartenant respectivement à l'axe des abscisses, la droite \mathcal{D} et la courbe \mathcal{C}_f .

Soit u_n le réel défini par : $u_n = \frac{C_n B_n}{A_n B_n}$.

- Démontrer que pour tout entier naturel supérieur ou égal à 3, on a : $u_n = \frac{2n - 5 - f(n)}{2n - 5}$.
- Quelle est la nature de la suite (u_n) ?
- Calculer la limite de la suite (u_n) .

Exercice II

Dans l'espace muni d'un repère, on donne les points suivants A(0 ; 1 ; -1), B(2 ; 1 ; 0), C(-3 ; -1 ; 1) et D(7 ; 3 ; -1).

Déterminer si les vecteurs \overrightarrow{AB} , \overrightarrow{AC} et \overrightarrow{AD} forment une base de l'espace.

Exercice III

On considère les droites d_1 , d_2 et d_3 données par leur représentation paramétrique suivantes :

$$d_1 \begin{cases} x = k_1 \\ y = 3 + k_1 \\ z = 1 + 2k_1 \end{cases}, k_1 \in \mathbb{R} \quad d_2 \begin{cases} x = 3 + 3k_2 \\ y = -3k_2 \\ z = -3 - 4k_2 \end{cases}, k_2 \in \mathbb{R} \quad d_3 \begin{cases} x = -2 + 4k_3 \\ y = 1 + 4k_3 \\ z = 1 \end{cases}, k_3 \in \mathbb{R}$$

- Montrer que c'est trois droites sont concourantes en un même point que l'on déterminera.
- Ces trois droites sont-elles coplanaires? Justifier.

Exercice IV Suite de Héron

Héron d'Alexandrie était un mathématicien du 1^{er} siècle après J.C.

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R}^* par $f(x) = \frac{1}{2} \left(x + \frac{2}{x} \right)$.

- Dresser le tableau de variation de f . (Attention à la valeur interdite)

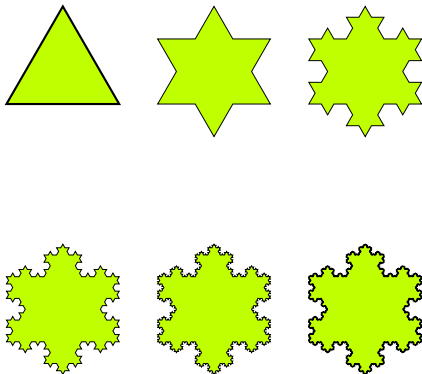
2) On considère la suite (u_n) définie par :
$$\begin{cases} u_0 = \frac{3}{2} \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$$

- Calculer u_1 et u_2 sous forme de fractions irréductibles.
- Écrire un algorithme / programme permettant de calculer et afficher les valeurs des dix premiers termes de cette suite.
- Conjecturer à l'aide de ces valeurs le sens de variation et la limite de la suite.
- Démontrer, par récurrence, que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $\sqrt{2} \leq u_{n+1} \leq u_n \leq \frac{3}{2}$
- En déduire que la suite (u_n) est convergente.
Déterminer sa limite.
- Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_{n+1} - \sqrt{2} \leq \frac{1}{2}(u_n - \sqrt{2})$.
- En déduit que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 < u_n - \sqrt{2} \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n (u_0 - \sqrt{2})$
- Retrouver alors la limite de u_n

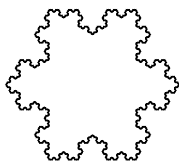
Exercice V Étude de la figure appelée « Flocon de Von Koch »

Construction de cette figure :

C_0 est un triangle équilatéral de côté 1 (figure 1). Sur chacun des côtés de C_0 partagé en trois segments de même longueur, on construit trois nouveaux triangles équilatéraux comme l'indique la figure ci-dessous : on obtient le polygone C_1 . On réitère ce processus et ce jusqu'à l'infini. La figure **limite** obtenue est appelée Flocon de Von Koch (ou flocon de neige).



Flocon de Von Koch :



Notations : On note C_n le polygone obtenu à la n -ième étape, x_n le nombre de ses côtés, a_n la longueur de chaque côté, p_n son périmètre et S_n son aire. Sur la figure ci-dessus, on a construit les polygones C_0, C_1, \dots, C_5 .

- Calculer x_1, a_1, p_1, S_1 et x_2, a_2, p_2, S_2 .
- Exprimer x_{n+1} en fonction de x_n . En déduire l'expression de x_n explicitement en fonction de n .
 - Exprimer a_{n+1} en fonction de a_n . En déduire l'expression de a_n explicitement en fonction de n .
 - Exprimer p_n en fonction de n . Quelle est la limite de la suite (p_n) ?
- Démontrer que $S_{n+1} = S_n + \frac{\sqrt{3}}{12} \left(\frac{4}{9}\right)^n$ et en déduire que, pour tout naturel $n \geq 1$,
$$S_n = S_0 + \frac{\sqrt{3}}{12} \left[1 + \frac{4}{9} + \left(\frac{4}{9}\right)^2 + \dots + \left(\frac{4}{9}\right)^{n-1} \right]$$
 - Quelle est la limite de la suite (S_n) ?

Conclusion : Compléter la phrase suivante :

Le flocon de Von Koch est une figure plane fermée de périmètre infini, mais dont l'aire vaut ...

Remarque : c'est une fractale (courbe invariante par changement d'échelle, c'est-à-dire qu'en regardant une partie avec une loupe, on retrouve la courbe initiale)