

Spécialité : DM n° 2

« L'essence des mathématiques, c'est la liberté. » [Georg Cantor]

Quelques rappels de présentation :

- Il faut écrire son nom en **CAPITALES D'IMPRIMERIE**
- Il faut sauter une :ligne entre deux questions.
- On n'écrit pas en dehors des lignes; si on est en bas de page, on tourne la page!

Exercice I Suite homographique

Soit la suite (u_n) définie par $u_0 = 2$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} = \frac{3u_n + 2}{u_n + 4}.$$

- 1) Calculer u_1 et u_2 .
- 2) Montrer par récurrence que $u_n \neq 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$
- 3) On pose $v_n = \frac{u_n + 2}{u_n - 1}$.
 - a) Montrer que (v_n) est géométrique; on précisera la raison et le premier terme.
 - b) En déduire v_n en fonction de n .
 - c) En déduire alors u_n en fonction de n .

Exercice II

Soit la suite (u_n) définie pour tout entier n par :

$$\begin{cases} u_0 = 5 \\ u_{n+1} = \sqrt{2u_n - 1}. \end{cases}.$$

- 1) Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $1 \leq u_{n+1} \leq u_n \leq 3$.
- 2) Que peut-on en déduire? (soyez le plus précis possible)

Exercice III Conformité à un modèle

Un groupe de spécialistes en environnement étudie le taux de disponibilité des ressources nécessaires pour le développement d'une population de grenouilles autour d'un étang. Ce taux dépend notamment de la quantité de nourriture à disposition et de la qualité de l'environnement.

Une étude, menée en 2020 par ce groupe, a permis d'estimer le taux de disponibilité des ressources à 0,9, ce qui signifie que 90 % des ressources étaient disponibles.

On modélise le taux de disponibilité des ressources par la suite (T_n) , définie sur $\mathbb{N}$ par $T_0 = 0,9$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $T_{n+1} = T_n - 0,1(T_n)^2$, où n est le nombre d'années écoulées depuis 2020.

- 1) Certains spécialistes estiment qu'en 2025, le taux de disponibilité des ressources sera proche de 0,6.
Cette affirmation est-elle conforme au modèle? Justifier.

- 2) Étudier les variations de la fonction f définie sur $[0 ; 1]$ par $f(x) = x - 0,1x^2$.
- 3) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq T_{n+1} \leq T_n \leq 1$.
- 4) La suite (T_n) est-elle convergente? Justifier.
- 5) Le groupe de spécialistes affirme que, selon ce modèle, le taux de disponibilité des ressources va passer à un niveau inférieur à 40 % dans les prochaines années, et qu'il est capable de déterminer en quelle année ce seuil sera atteint.
Cette affirmation est-elle conforme au modèle? Pourquoi?

Exercice IV

Étudier les variations sur $] -2 ; 1[$ de la fonction f définie par

$$f(x) = \frac{-5x^2 + 4x - 8}{x^2 + x - 2}.$$

Exercice V

On considère la fonction f définie par :

$$f(x) = \frac{2x^2 + 6x + 1}{x^2 + 2}.$$

Soit $\mathcal{C}$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormal.

1. Donner l'ensemble de définition de f .
2. Calculer la dérivée f' et étudier son signe.
3. Donner le tableau de variations de la fonction f sur l'intervalle $[-10 ; 10]$.
4. Déterminer l'équation de la tangente T à $\mathcal{C}$ en son point d'abscisse 0.
Représenter la courbe $\mathcal{C}$ et sa tangente T .
5. Déterminer le nombre de points communs à la courbe $\mathcal{C}$ et à sa tangente T .
Quelles sont les coordonnées de ce(s) point(s)? Préciser les positions relatives de $\mathcal{C}$ et T .

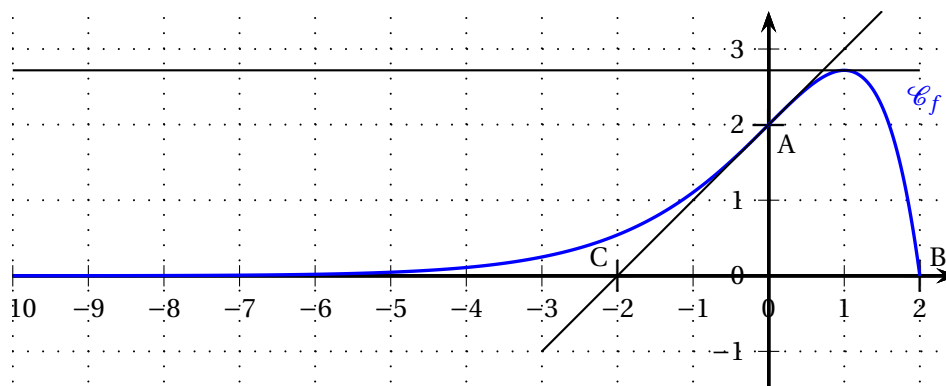
Exercice VI

Partie A

Dans le repère ci-dessous, on note $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative d'une fonction f définie sur l'intervalle $[-10; 2]$. On a placé les points A(0; 2), B(2; 0) et C(-2; 0).

On dispose des renseignements suivants :

- Le point B appartient à la courbe $\mathcal{C}_f$.
- La droite (AC) est tangente en A à la courbe $\mathcal{C}_f$.
- La tangente à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 1 est une droite horizontale.



Répondre aux questions suivantes par lecture graphique.

1. Indiquer les valeurs de $f(0)$ et de $f(2)$.
2. Indiquer la valeur de $f'(1)$.
3. Donner une équation de la tangente à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point A.
4. Indiquer le nombre de solutions de l'équation $f(x) = 1$ dans l'intervalle $[-10; 2]$.
5. Indiquer les variations de la fonction f sur l'intervalle $[-10; 2]$.

Partie B

Dans cette partie, on cherche à vérifier par le calcul les résultats lus graphiquement dans la partie A. On sait désormais que la fonction f est définie sur l'intervalle $[-10; 2]$ par :

$$f(x) = (2 - x)e^x.$$

1. Calculer $f(0)$ et $f(2)$.
 - (a) Calculer $f'(x)$ pour tout nombre x appartenant à l'intervalle $[-10; 2]$.
 - (b) En déduire la valeur de $f'(1)$.
2. Déterminer une équation de la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse 0.
3.
 - (a) Dresser le tableau des variations de la fonction f sur l'intervalle $[-10; 2]$.
 - (b) En déduire le nombre de solutions de l'équation $f(x) = 1$ dans l'intervalle $[-10; 2]$, puis donner une valeur approchée au centième de chacune de ces solutions.