

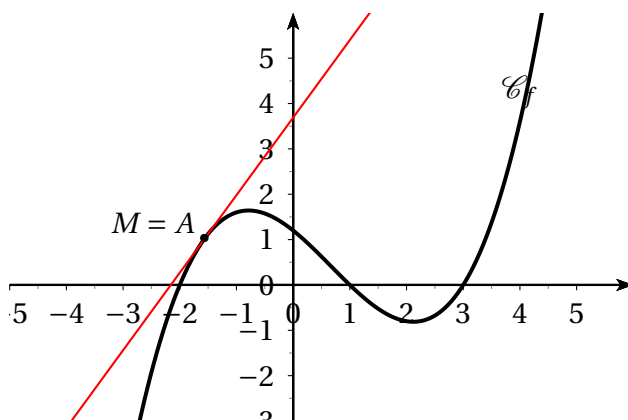
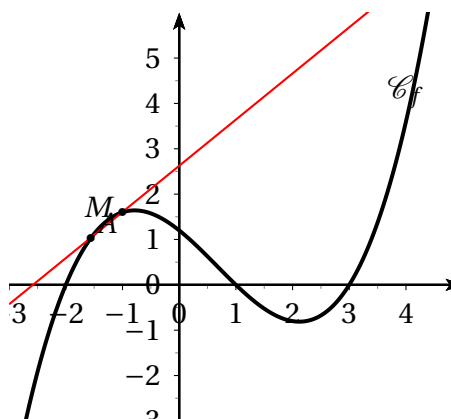
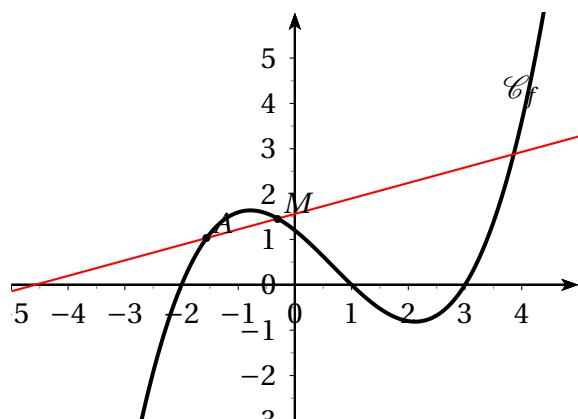
Fonctions numériques : dérivation

Table des matières

I	Notion de tangente à une courbe	1
II	Nombre dérivé de f en a et fonction dérivée :	2
III	Tableau des dérivées usuelles :	4
IV	Dérivées et opérations :	5
V	Variations d'une fonction	6

I Notion de tangente à une courbe

Soit f une fonction définie sur un intervalle I de courbe représentative $\mathcal{C}_f$ et soit A un point fixe de $\mathcal{C}_f$. Soit M un point variable de $\mathcal{C}_f$. On trace la droite (AM) qui est sécante à $\mathcal{C}_f$. On fait tendre M vers A . Si, lorsque M tend vers A , la sécante admet une position limite, on dit que cette limite est tangente à $\mathcal{C}_f$.



II Nombre dérivé de f en a et fonction dérivée :

Définition

Notons a l'abscisse de A et x l'abscisse de M . Le coefficient directeur de la sécante (AM) est : $\frac{f(x) - f(a)}{x - a}$.

Dire que la sécante a une position limite qui est la droite tangente à $\mathcal{C}_f$ en A signifie que $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ existe et est un nombre fini.

Si ce nombre **existe** et s'il est **fini**, on pose : $f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ et ce nombre est le **nombre dérivé** de f en a .

On dit alors que f est dérivable en a .

Remarque :

En posant $x = a + h$, on obtient : $f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h}$.

Exemple : $f(x) = x^2$.

Montrons que f est dérivable en 3.

$$\text{Pour tout } h, \frac{f(3 + h) - f(3)}{h} = \frac{[3 + h]^2 - 3^2}{h} = \frac{3^2 + 2 \times 3 \times h + h^2 - 3^2}{h} = \frac{6h + h^2}{h} = 6 + h.$$

$$\text{Par conséquent : } \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{f(3 + h) - f(3)}{h} \right) = 6.$$

f est dérivable en a et $f'(3) = 6$

$$\text{Cas général : Pour tout } a \in \mathbb{R} : \frac{f(a + h) - f(a)}{h} = \frac{[a + h]^2 - a^2}{h} = \frac{a^2 + 2ah + h^2 - a^2}{h} = \frac{2ah + h^2}{h} = 2a + h.$$

$$\text{Par conséquent : } \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{f(a + h) - f(a)}{h} \right) = 2a.$$

f est dérivable en a et $f'(a) = 2a$

Par définition, $f'(a)$ est le **coefficient directeur de la tangente** à $\mathcal{C}_f$ en a .

Propriété

L'équation de la tangente est alors : $y = f'(a)(x - a) + f(a)$.

Démonstration :

Rappel : la droite, de coefficient directeur a et passant par le point M_0 de coordonnées $(x_0 ; y_0)$ a pour équation $y - y_0 = a(x - x_0)$.

En effet, l'équation est de la forme $y = ax + b$.

Comme M_0 appartient à cette droite, ses coordonnées vérifient cette équation, donc $y_0 = ax_0 + b$.

Par conséquent : $\begin{cases} y &= ax + b \\ y_0 &= ax_0 + b \end{cases}$.

Par soustraction, on obtient : $y - y_0 = a(x - x_0)$.

Pour la tangente, on obtient donc : $y - y_A = f'(a)(x - x_A)$ qui donne $y = f'(a)(x - x_A) + f(a)$.

Définition

| f est dérivable sur un intervalle ouvert I si f est dérivable en tout a de I .

Remarque

La dérivée f' de f est elle-même une fonction. Si elle est dérivable, on appelle f'' sa dérivée (dérivée seconde de f).

Cette dérivée seconde peut elle-même être dérivable et ainsi de suite. Les dérivées d'ordre n , avec $n \geq 3$, se notent $f^{(n)}$.

Ainsi : $f'' = (f')'$; $f^{(3)} = (f'')'$ et plus généralement $f^{(n+1)} = (f^{(n)})'$

Exemples :

1. Soit $f(x) = 3x^4 + 5x^2 + 2x + 1$.

On a : $f'(x) = 12x^3 + 10x + 2$; $f''(x) = 36x^2 + 10$; $f^{(3)}(x) = 72x$; $f^{(4)}(x) = 72$; $f^{(5)}(x) = 0$ et les dérivées suivantes sont toutes égales à la fonction nulle.

2. Imaginons qu'il existe une fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que, $f'(x) = f(x)$. f est-elle dérivable à l'ordre 3 si oui, que vaut $f^{(3)}$?

Réponse : $f' = f$ donc f' est dérivable et $f'' = (f')' = f'$ et de même $f^{(3)} = f$.

On pourrait alors montrer par récurrence, que la fonction f vérifie alors : pour tout n , $f^{(n)} = f$.

On étudiera cette fonction plus en détail dans un prochain chapitre.

Exercices

- Montrer que la fonction $x \mapsto |x|$ n'est pas dérivable en 0.
- Étudier la dérivabilité de la fonction $x \mapsto x|x|$ en 0.

Solutions :

- Soit f la fonction $x \mapsto |x|$.

$$\forall x \neq 0, \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{|x| - 0}{x - 0} = \frac{|x|}{x}.$$

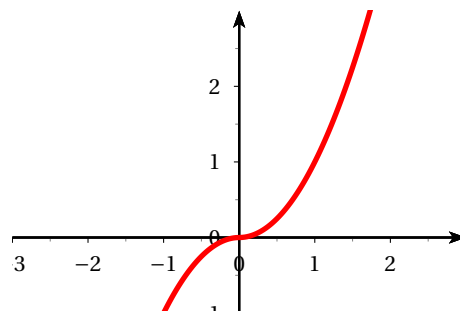
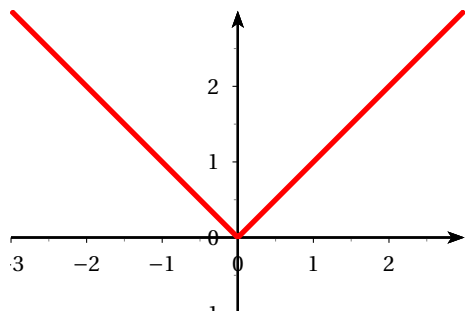
$$\text{Si } x < 0, \frac{|x|}{x} = \frac{-x}{x} = -1 \text{ et pour } x > 0, \frac{|x|}{x} = \frac{x}{x} = 1.$$

$$\text{On en déduit que : } \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} (-1) = -1, \text{ alors que } \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} (1) = 1.$$

La limite à gauche et à droite n'est pas la même, donc la limite en 0 n'existe pas; f n'est pas dérivable en 0 (mais l'est à gauche et à droite); on dit que la courbe admet une demi-tangente à gauche et une demi-tangente à droite.

- Soit $g : x \mapsto x|x|$. Cette fois, on a : $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x) - g(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x|x|}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} (|x|) = 0$; la limite existe, donc la fonction g est dérivable en 0 et la courbe représentative de g a une tangente en 0.

Voici les deux représentations graphiques de f et de g .



III Tableau des dérivées usuelles :

Fonction f définie par :	Fonction f' définie par :	Domaine de validité de la dérivée
$f(x) = k \in \mathbb{R}$	$f'(x) = 0$	$\mathbb{R}$
$f(x) = x^n (n \in \mathbb{N}^*)$	$f'(x) = nx^{n-1}$	$\mathbb{R}$
$f(x) = \frac{1}{x}$	$f'(x) = -\frac{1}{x^2}$	$\mathbb{R}^*$
$f(x) = \frac{1}{x^n} = x^{-n} (n \in \mathbb{N}, n \geq 2)$	$f'(x) = -\frac{n}{x^{n+1}} = -nx^{-n-1}$	$\mathbb{R}^*$
$f(x) = \sqrt{x}$	$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$]0; +\infty[$
$f(x) = \cos x$	$f'(x) = -\sin x$	$\mathbb{R}$
$f(x) = \sin x$	$f'(x) = \cos x$	$\mathbb{R}$

IV Dérivées et opérations :

Soient u, v deux fonctions dérivables sur un intervalle I et k un réel.

- $(ku)' = ku'$
- $(u + v)' = u' + v'$
- $(uv)' = u'v + uv'$
- $\left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{u'}{u^2}, u(x) \neq 0$
- $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}, v(x) \neq 0$

Exemples :

1. $f(x) = 3x^5$; $f = ku$ avec $k = 3$ et $u(x) = x^5$.

$$f' = ku' \text{ avec } u'(x) = 5x^4 \text{ donc } f'(x) = 3 \times 5x^4 = \boxed{15x^4}.$$

2. $f(x) = x + \frac{1}{x}$ sur $\mathbb{R}^*$.

$$f = u + v \text{ avec } \begin{cases} u(x) = x \\ v(x) = \frac{1}{x} \end{cases}.$$

$$f' = u' + v' \text{ avec } \begin{cases} u'(x) = 1 \\ v'(x) = -\frac{1}{x^2} \end{cases}.$$

$$\text{Alors : } f'(x) = 1 + \left(-\frac{1}{x^2}\right) = \boxed{1 - \frac{1}{x^2}}$$

3. $f(x) = (3x + 5)\sqrt{x}$ sur $\mathbb{R}^+$.

$$f = uv \text{ avec } \begin{cases} u(x) = 3x + 5 \\ v(x) = \sqrt{x} \end{cases}.$$

f est dérivable sur $]0; +\infty[$.

$$\text{Alors } f' = u'v + uv' \text{ avec } \begin{cases} u'(x) = 3 \\ v'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \end{cases}$$

$$\text{On en déduit : } f'(x) = 3\sqrt{x} + (3x + 5) \times \frac{1}{2\sqrt{x}} = 3\sqrt{x} + \frac{3x + 5}{2\sqrt{x}} = \frac{3\sqrt{x} \times 2\sqrt{x} + (3x + 5)}{2\sqrt{x}} = \frac{6x + (3x + 5)}{2\sqrt{x}} = \frac{9x + 5}{2\sqrt{x}}$$

$$\text{car } 3\sqrt{x} \times 2\sqrt{x} = 3 \times 2 \times (\sqrt{x})^2 = 6x.$$

4. $f(x) = \frac{2x + 5}{3x - 7}$ sur $\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{7}{3}\right\}$.

$$f = \frac{u}{v} \text{ avec } \begin{cases} u(x) = 2x + 5 \\ v(x) = 3x - 7 \end{cases}.$$

$$\text{Alors : } f' = \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2} \text{ avec } \begin{cases} u'(x) = 2 \\ v'(x) = 3 \end{cases}.$$

$$\text{Donc : } f'(x) = \frac{2(3x - 7) - 3(2x + 5)}{(3x - 7)^2} = \frac{6x - 14 - 6x - 15}{(3x - 7)^2} = \boxed{-\frac{29}{(3x - 7)^2}}$$

V Variations d'une fonction



Théorème (admis)

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I .

- f est constante sur I si, et seulement si, $f' = 0$ sur I .
- f est croissante sur I si, et seulement si, f' est strictement positive sur I sauf éventuellement pour un certain nombre fini de valeurs isolées pour lesquelles elle s'annule.
- f est décroissante sur I si, et seulement si, f' est strictement négative sur I sauf éventuellement pour un certain nombre fini de valeurs isolées pour lesquelles elle s'annule.

Exemples :

1. $f(x) = x^2$ sur $\mathbb{R}$; $f'(x) = 2x$ qui est négatif sur $\mathbb{R}^-$ et positif sur $\mathbb{R}^+$.

On en déduit que f est décroissante sur $\mathbb{R}^-$ et croissante sur $\mathbb{R}^+$.

2. $f(x) = \frac{1}{x}$ sur $\mathbb{R}^*$; $f'(x) = -\frac{1}{x^2} < 0$.

On en déduit que f est décroissante sur $] -\infty ; 0[$; de même que sur $]0 ; +\infty$.

Remarque : la monotonie a lieu sur des **intervalles**.

3. $f(x) = \sqrt{x}$ sur $\mathbb{R}^+$; f est dérivable sur $]0 ; +\infty[$ et $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} > 0$ donc la fonction f est croissante sur $]0 ; +\infty[$.

4.

Soit f la fonction définie par : $f(x) = x^3$ définie sur $\mathbb{R}$.

$f'(x) = 3x^2 > 0$ pour $x \neq 0$ et $f'(x) = 0$ pour $x = 0$.

On en déduit que la fonction f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

La courbe $\mathcal{C}_f$ admet une tangente horizontale en 0.

