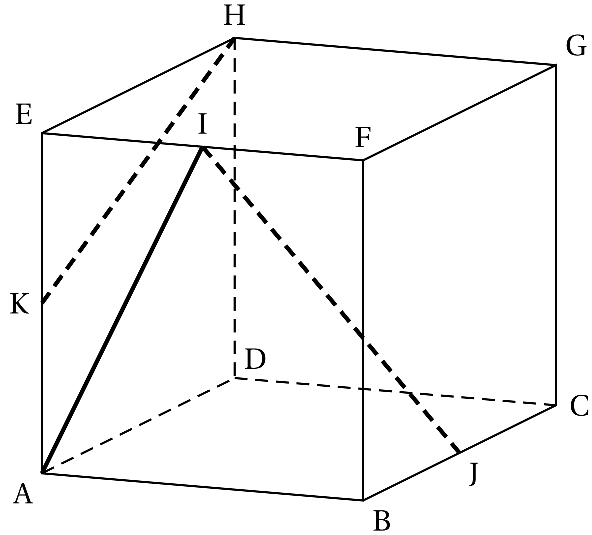
Correction de la feuille d'exercices n° 1

Exercice I Amérique du Nord 2021



1. $\overrightarrow{KH}$ et $\overrightarrow{AI}$ ne sont pas coplanaires donc les droites (AI) et (KH) ne sont pas parallèles.
   Autre façon :
   - $\overrightarrow{KH} = \overrightarrow{KE} + \overrightarrow{EH} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AD}$
   - $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{AE} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$
   - Ces deux vecteurs ne sont pas colinéaires donc les droites (AI) et (KH) ne sont pas parallèles.

   On a $\overrightarrow{\text{AI}}\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\0\\1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{\text{KH}}\begin{pmatrix}0\\1\\\frac{1}{2}\end{pmatrix}$: ces vecteurs ne sont pas colinéaires, donc les droites (AI) et (KH) ne sont pas parallèles.

2. (a) On a : $\boxed{I\left(\frac{1}{2}\,;\,0\,;\,1\right)}$ et $\boxed{J\left(1\,;\,\frac{1}{2}\,;\,0\right)}$.

   (b) • **Première façon** :
   $\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{IE} + \overrightarrow{EA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BJ}$
   $= -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{AE} = \boxed{\frac{1}{2}\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AE}}$.
   $\overrightarrow{IJ}$ est une combinaison linéaire des vecteurs $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AE}$; ces trois vecteurs sont **coplanaires**

   • **Deusième façon** :
   On a $\overrightarrow{IJ}\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}\\-1\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AE}\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{\text{AC}}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$.
   On a $2\overrightarrow{\text{IJ}} + 2\overrightarrow{\text{AE}} = \overrightarrow{\text{AC}}$.
   Le vecteur $\overrightarrow{\text{AC}}$ est donc une combinaison des vecteurs $\overrightarrow{\text{IJ}}$ et $\overrightarrow{\text{AE}}$: ces trois vecteurs sont donc coplanaires.

4. d_1 a pour vecteur directeur $\overrightarrow{u_1}\begin{pmatrix}1\\-2\\3\end{pmatrix}$ et d_2 a pour vecteur directeur $\overrightarrow{u_2}\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}$: ces vecteurs ne sont pas colinéaires, donc les droites d_1 et d_2 ne sont pas parallèles

5. Le plan a pour vecteur normal le vecteur $\overrightarrow{p}\begin{pmatrix}1\\3\\-2\end{pmatrix}$ et d_2 a pour vecteur directeur $\overrightarrow{u_2}\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}$.

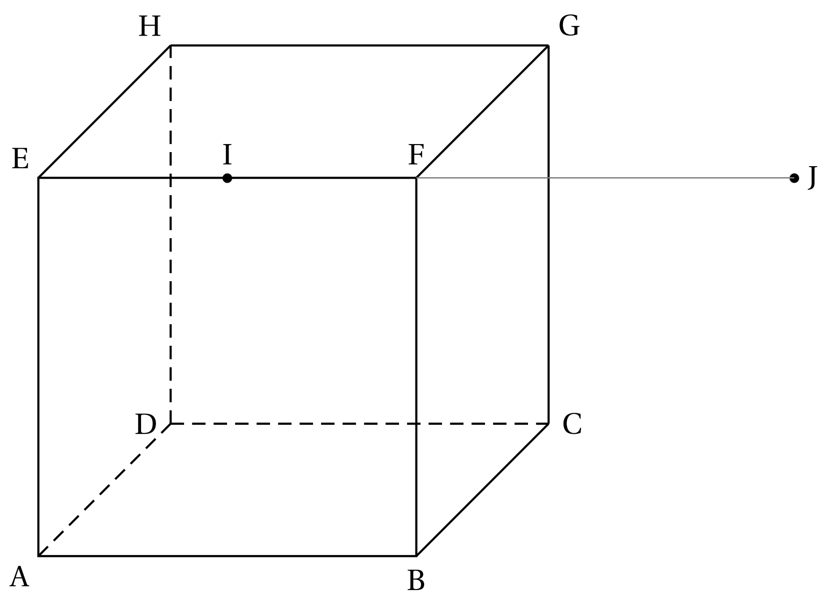
   Or $\overrightarrow{p}\cdot\overrightarrow{u_2} = 1+3-4=0$: les vecteurs sont orthogonaux donc la droite d_2 est parallèle au plan $\mathscr{P}$.

6. On a $\overrightarrow{\text{ML}}\begin{pmatrix}-1\\-3\\2\end{pmatrix}$, donc $\overrightarrow{\text{ML}} = -\overrightarrow{p}$ est un vecteur normal au plan $\mathscr{P}$.

   $x_L+3y_L-2z_L+2 == 4+0-6+2=0$ donc $L\in\mathscr{P}$.
   L est bien le projeté orthogonal de M sur $\mathscr{P}$.

Exercice II Sujet 0

On considère le cube ABCDEFGH de côté 1, le milieu I de [EF] et J le symétrique de E par rapport à F.



Dans tout l'exercice, l'espace est rapporté au repère orthonormé $\left(\text{A}\,;\,\overrightarrow{\text{AB}},\,\overrightarrow{\text{AD}},\,\overrightarrow{\text{AE}}\right)$.

Les sommets du cube ont pour coordonnées : A(0 ; 0 ; 0) ; B(1 ; 0 ; 0), D(0 ; 1 ; 0), E(0 ; 0 ; 1), C(1 ; 1 ; 0), F(1 ; 0 ; 1), H(0 ; 1 ; 1) et G(1 ; 1 ; 1).

1. (a)
   - Le point I est le milieu de [EF] donc I a pour coordonnées $\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\0\\1\end{pmatrix}$.
   - Le point J est le symétrique de E par rapport à F, donc J a pour coordonnées $\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}$.

(b) On en déduit les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{DJ}\begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{BI}\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\0\\1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{BG}\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$.

(c)
- Les vecteurs $\overrightarrow{BI}$ et $\overrightarrow{BG}$ ne sont pas colinéaires donc ce sont deux vecteurs directeurs du plan (BGI).
- $\overrightarrow{DJ}\cdot\overrightarrow{BI} = -1+0+1 = 0$ donc $\overrightarrow{DJ}\perp\overrightarrow{BI}$.
- $\overrightarrow{DJ}\cdot\overrightarrow{BG} = 0-1+1 = 0$ donc $\overrightarrow{DJ}\perp\overrightarrow{BG}$.

Donc le vecteur $\overrightarrow{DJ}$ est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan (BGI), donc il est normal au plan (BGI).

(d)
- Le vecteur $\overrightarrow{DJ}\begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix}$ est normal au plan (BGI) donc le plan (BGI) a une équation de la forme $2x - y + z + d = 0$.
- Le point B appartient au plan (BGI) donc les coordonnées de B vérifient l'équation du plan ; donc $2x_{\text{B}} - y_{\text{B}} + z_{\text{B}} + d = 0$, ce qui équivaut à $2-0+0+d = 0$, ce qui veut dire que $d = -2$.

Donc une équation cartésienne du plan (BGI) est $2x - y + z - 2 = 0$.

2. On note d la droite passant par F et orthogonale au plan (BGI).

(a) La droite d est orthogonale au plan (BGI), et $\overrightarrow{DJ}$ est un vecteur normal au plan (BGI), donc $\overrightarrow{DJ}$ est un vecteur directeur de la droite d.

Le point F appartient à la droite d donc la droite d est l'ensemble des points M de coordonnées $(x\,;\,y\,;\,z)$ tels que $\overrightarrow{FM}$ et $\overrightarrow{DJ}$ soient colinéaires.

$\overrightarrow{FM}$ et $\overrightarrow{DJ}$ colinéaires $\iff \overrightarrow{FM} = t.\overrightarrow{DJ} \iff \left\{\begin{array}{rcl} x-1 &=& t\times 2\\ y-0 &=& t\times(-1)\\ z-1 &=& t\times 1\end{array}\right.$

Donc la droite d a pour équation $\left\{\begin{array}{rcl} x &=& 1+2t\\ y &=& -t\\ z &=& 1+t\end{array}\right.$, $t\in\mathbb{R}$

(b) On considère le point L de coordonnées $\left(\frac{2}{3}\,;\,\frac{1}{6}\,;\,\frac{5}{6}\right)$.

- Pour prouver que $\text{L}\in d$, on cherche t pour que $\left\{\begin{array}{rcl} \frac{2}{3} &=& 1+2t\\ \frac{1}{6} &=& -t\\ \frac{5}{6} &=& 1+t\end{array}\right.$

  On trouve $t = -\frac{1}{6}$ donc $\text{L}\in d$.
- Le plan (BGI) a pour équation $2x - y + z - 2 = 0$; or $2x_{\text{L}} - y_{\text{L}} + z_{\text{L}} - 2 = \frac{4}{3} - \frac{1}{6} + \frac{5}{6} - 2 = 0$, donc $\text{L}\in$ (BGI).

Le point L est donc le point d'intersection de la droite d et du plan (BGI).

3. (a) La pyramide FBGI a pour base le triangle rectangle FBG, et pour hauteur IF.

- $\text{IF} = \frac{1}{2}$

- Le triangle rectangle FBG a pour aire $\dfrac{\text{FG} \times \text{FB}}{2} = \dfrac{1}{2}$.

Le volume de la pyramide FBGI est donc $\mathcal{V} = \dfrac{1}{3} \times \dfrac{1}{2} \times \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{12}$.

(b) La droite d est orthogonale au plan (BGI) et coupe ce plan en L. Le point F appartient à la droite d, donc on peut dire que la distance FL est la distance du point F au plan (BGI), autrement dit c'est la hauteur de la pyramide FBGI dont le triangle BGI est la base.

$\text{FL}^2 = \left(\dfrac{2}{3} - 1\right)^2 + \left(\dfrac{1}{6} - 0\right)^2 + \left(\dfrac{5}{6} - 1\right)^2 = \dfrac{1}{9} + \dfrac{1}{36} + \dfrac{1}{36} = \dfrac{6}{36} = \dfrac{1}{6}$ donc $\text{FL} = \dfrac{1}{\sqrt{6}}$

On appelle $\mathcal{A}$ l'aire du triangle BGI. On exprime le volume de la pyramide FBGI :

$\mathcal{V} = \dfrac{1}{3} \times \text{FL} \times \mathcal{A} \iff \dfrac{1}{12} = \dfrac{1}{3} \times \dfrac{1}{\sqrt{6}} \times \mathcal{A} \iff \dfrac{3 \times \sqrt{6}}{12} = \mathcal{A} \iff \mathcal{A} = \dfrac{\sqrt{6}}{4}$

L'aire du triangle BGI est égale à $\dfrac{\sqrt{6}}{4}$.

Exercice III Antilles septembre 2020

On se place dans le repère $\left(\text{A}\,;\,\overrightarrow{\text{AB}},\,\overrightarrow{\text{AD}},\,\overrightarrow{\text{AE}}\right)$.

1. H(0 ; 1 ; 1) , M(0,5 ; 0 ; 0) et N(1 ; 0,5 ; 0).
2. (a) La droite (MN) est définie par le point M et le vecteur $\overrightarrow{\text{MN}}$.

M(0,5 ; 0 ; 0) et $\overrightarrow{\text{MN}}\begin{pmatrix}0,5\\0,5\\0\end{pmatrix}$

Une représentation paramétrique de la droite (MN) est donc :

$$\left\{\begin{array}{lcl} x & = & 0,5 + 0,5k \\ y & = & 0,5k \\ z & = & 0 \end{array}\right., \; k \in \mathbb{R}.$$

(b) Une représentation paramétrique de la droite (CD) est

$$\left\{\begin{array}{lcl} x & = & t \\ y & = & 1 \\ z & = & 0 \end{array}\right., \; t \in \mathbb{R}.$$

K étant le point d'intersection des droites (CD) et (MN), ses coordonnées sont solutions du système suivant :

$$\left\{\begin{array}{l} x = t \\ y = 1 \\ z = 0 \\ x = 0,5 + 0,5k \\ y = 0,5k \\ z = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} 1 = 0,5k \\ t = 0,5 + 0,5k \\ x = t \\ y = 1 \\ z = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} k = 2 \\ t = 1,5 \\ x = 1,5 \\ y = 1 \\ z = 0 \end{array}\right.$$

C'est pourquoi K (1,5 ; 1 ; 0)

3. (a) $\overrightarrow{HM}\begin{pmatrix}0,5\\-1\\-1\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{HN}\begin{pmatrix}1\\-0,5\\-1\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix}2\\-2\\3\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{HM}$ et $\overrightarrow{HN}$ ne sont pas colinéaires car $\dfrac{1}{0,5} \neq \dfrac{-0,5}{-1}$

$\overrightarrow{n}\cdot\overrightarrow{HM} = 2\times 0,5 - 2\times(-1) + 3\times(-1) = 1+2-3 = 0$

$\overrightarrow{n}\cdot\overrightarrow{HN} = 2\times 1 - 2\times(-0,5) + 3\times(-1) = 2+1-3 = 0$

Le vecteur $\overrightarrow{n}$ est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan (HMN),c'est donc un vecteur normal à ce plan.

(b) $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix}2\\-2\\3\end{pmatrix}$ étant un vecteur normal du plan (HMN),

une équation cartésienne de ce plan est $2x-2y+3z+d=0$, H$(0\,;\,1\,;\,1)$ appartient à ce plan donc ses coordonnées vérifient l'équation, on a donc $2\times 0 - 2\times 1 + 3\times 1 + d = 0$ soit $d=-1$

Une équation du plan (HMN) est donc $2x-2y+3z-1=0$

(c) Déterminons une représentation paramétrique de la droite (CG). Cette droite est déterminée par le point C$(1\,;\,1\,;\,0)$ et $\overrightarrow{CG}\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$

Une représentation paramétrique de la droite (MN) est donc :

$$\left\{\begin{array}{lcl} x & = & 1\\ y & = & 1\\ z & = & p\end{array}\right., p\in\mathbb{R}.$$

L est le point d'intersection de la droite (CG) et du plan (HMN), ses coordonnées sont donc solutions du système suivant :

$$\left\{\begin{array}{l}2x-2y+3z-1=0\\ x=1\\ y=1\\ z=p\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l}2-2+3p-1=0\\ x=1\\ y=1\\ z=p\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l}p=\dfrac{1}{3}\\ x=1\\ y=1\\ z=\dfrac{1}{3}\end{array}\right.$$

C'est pourquoi L $(1\,;\,1\,;\,\dfrac{1}{3})$

4. Sur la face (ABCD), on trace le segment [MN],

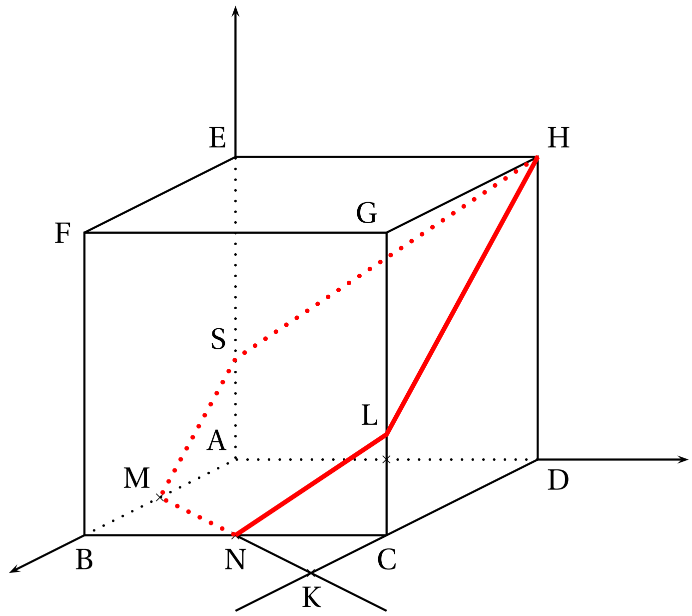
sur la face (BCGF), on trace le segment [NL],

sur la face (CDHG), on trace le segment [LH],

Les faces (ABFE) et (CDHG) sont parallèles donc les droites d'intersection des ces deux plans avec le plan (HMN) sont parallèles. On trace la parallèle à (LH) passant par M, elle coupe la droite (AE) en un point S.

Sur la face (ADHE), on trace le segment [SH],(on peut remarquer que (SH) est parallèle à (NL).

La section du cube par le plan (HMN) est donc MNLHS.


E
H
F
G
S
L
A
M
D
B
N
C
K