

Correction de la feuille

I

La suite (I_n) est définie sur \mathbb{N} par :

$$I_n = \int_0^1 (1 + t^n) dt.$$

1. Pour tout n , $I_{n+1} - I_n = \int_0^1 (1 + t^{n+1}) dt - \int_0^1 (1 + t^n) dt = \int_0^1 (t^{n+1} - t^n) dt = \boxed{\int_0^1 (t^n(t-1)) dt}$.

Sur $[0; 1]$, $t - 1 \leq 0$ et $t^n \geq 0$ donc $t^n(t-1) \leq 0$ donc l'intégrale est négative.

$I_{n+1} - I_n \leq 0$ donc la suite (I_n) est **décroissante**.

2. Elle est positive car on intègre des fonctions positives.

(I_n) est décroissante positive (donc minorée); elle **converge**.

Remarque : $F_n(t) = t + \frac{t^{n+1}}{n+1}$ en posant $f_n(t) = 1 + t^n$ d'où $I_n = \left[t + \frac{t^{n+1}}{n+1} \right]_0^1 = 1 + \frac{1}{n+1}$ qui converge vers 1, donc

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = 1}$$

II

Pour tout entier naturel non nul n , on pose :

$$I_n = \int_n^{n+1} \frac{1}{x} dx.$$

1. $x \mapsto \frac{1}{x}$ est décroissante sur $[n; n+1]$ donc $\boxed{\frac{1}{n+1} \leq \frac{1}{x} \leq \frac{1}{n}}$ pour $x \in [n; n+1]$.

En intégrant (conservation de l'ordre), on trouve :

$$\int_n^{n+1} \frac{1}{n+1} dx \leq \int_n^{n+1} \frac{1}{x} dx \leq \int_n^{n+1} \frac{1}{n} dx$$

qui donne $\boxed{\frac{1}{n+1} \leq I_n \leq \frac{1}{n}}$.

2. $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n+1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$, donc $\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = 0}$ d'après le théorème des gendarmes.

Remarque : $I_n = [\ln x]_n^{n+1} = \ln(n+1) - \ln(n) = \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) = \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$ qui tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$.

3. On pose, pour tout entier naturel non nul n :

$$u_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}.$$

On a successivement :

$$\frac{1}{2} \leq I_1 \leq 1$$

$$\frac{1}{3} \leq I_2 \leq \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{4} \leq I_3 \leq \frac{1}{3}$$

$$\vdots$$

$$\frac{1}{n+1} \leq I_n \leq \frac{1}{n}.$$

Par somme : $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} \leq I_1 + I_2 + \dots + I_n \leq 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}$.

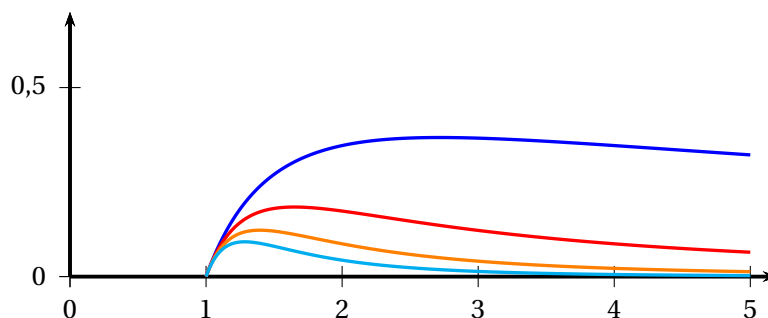
Or $I_1 + I_2 + \dots + I_n = \int_1^n \frac{1}{x} dx = [\ln x]_1^n = \ln(n)$ qui tend vers $+\infty$ donc $\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty}$.

III Liban mai 2018

On considère, pour tout entier $n > 0$, les fonctions f_n définies sur l'intervalle $[1; 5]$ par :

$$f_n(x) = \frac{\ln x}{x^n}.$$

Pour tout entier $n > 0$, on note \mathcal{C}_n la courbe représentative de la fonction f_n dans un repère orthogonal. Sur le graphique ci-dessous sont représentées les courbes \mathcal{C}_n pour n appartenant à $\{1; 2; 3; 4\}$.



$$1. f_n = \frac{u}{v_n} \text{ avec } \begin{cases} u(x) = \ln x \\ v_n(x) = x^n \end{cases}.$$

$$f' = \left(\frac{u}{v_n} \right)' = \frac{u'v_n - uv_n'}{v_n^2} \text{ avec } \begin{cases} u'(x) = \frac{1}{x} \\ v_n'(x) = nx^{n-1} \end{cases}.$$

$$\text{Alors : } f'_n(x) = \frac{\frac{1}{x} \times x^n - nx^{n-1} \ln x}{x^{2n}} = \frac{x^{n-1}(1 - n \ln x)}{x^{2n}} = \frac{1 - n \ln x}{x^{2n-(n-1)}} = \boxed{\frac{1 - n \ln x}{x^{n+1}}}.$$

2. Pour tout entier $n > 0$, on admet que la fonction f_n admet un maximum sur l'intervalle $[1; 5]$.

On note A_n le point de la courbe \mathcal{C}_n ayant pour ordonnée ce maximum.

L'abscisse x_n de A_n est la valeur pour laquelle $f'_n(x)$ s'annule, donc

$$1 - n \ln x_n = 0 \iff x_n = e^{\frac{1}{n}} \in [1; 5].$$

$$\text{L'ordonnée de } A_n \text{ est alors } y_n = f_n(x_n) = \frac{\ln\left(e^{\frac{1}{n}}\right)}{\left(e^{\frac{1}{n}}\right)^n} = \frac{\frac{1}{n}}{e^1} = \frac{1}{n} \times \frac{1}{e} = \frac{1}{e} \times \ln\left(e^{\frac{1}{n}}\right) = \frac{1}{e} \ln(x_n).$$

Les points A_n appartiennent donc à la courbe Γ d'équation $y = \frac{1}{e} \ln x$.

3. (a) Quel que soit x appartenant à l'intervalle $[1; 5]$, $0 \leq \ln x \leq \ln(5)$ car la fonction \ln est croissante; en divisant par x^n positif, on trouve

$$0 \leq \frac{\ln x}{x^n} \leq \frac{\ln(5)}{x^n}.$$

$$(b) \int_1^5 \frac{1}{x^n} dx = \left[-\frac{1}{(n-1)x^{n-1}} \right]_1^5 = \frac{1}{n-1} \left[-\frac{1}{5^{n-1}} - (-1) \right] = \boxed{\frac{1}{n-1} \left(1 - \frac{1}{5^{n-1}} \right)}.$$

$$(c) \text{L'aire cherchée est } \mathcal{A}_n = \int_1^5 f_n(x) dx = \int_1^5 \frac{\ln x}{x^n} dx.$$

On sait que $0 \leq \frac{\ln x}{x^n} \leq \frac{\ln 5}{x^n}$ donc par conservation de l'ordre,

$$\int_1^5 0 dx \leq \int_1^5 \frac{\ln x}{x^n} dx \leq \int_1^5 \frac{\ln 5}{x^n} = \ln 5 \int_1^5 \frac{1}{x^n} dx = \frac{\ln 5}{n-1} \left(1 - \frac{1}{5^{n-1}} \right).$$

$$5 > 1 \text{ donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} 5^{n-1} = +\infty \text{ donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{5^{n-1}} \right) = 0.$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln 5}{n-1} = 0.$$

$$\text{Par produit : } \boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathcal{A}_n = 0}.$$

IV Métropole juin 2014

Partie A

1. L'image de 0 par la fonction f_1 est : $f_1(0) = 0 + e^{-0} = 1$.

Le point d'abscisse 0 sur la courbe \mathcal{C}_1 , représentative de la fonction f_1 , est le point de coordonnées $(0; f_1(0))$, c'est à dire ici $(0; 1)$. Le point A, de coordonnées $(0; 1)$ est donc bien un point de la courbe \mathcal{C}_1 .

2. La fonction f_1 est dérivable sur \mathbf{R} , en tant que somme et composée de fonctions dérivables sur \mathbf{R} .

Sa dérivée est définie sur \mathbf{R} par :

$$f_1'(x) = 1 + (-1)e^{-x} = 1 - e^{-x}.$$

$$\text{On a : } f_1'(x) \geq 0 \iff 1 - e^{-x}$$

$$\iff 1 \geq e^{-x}$$

$$\iff 0 \geq -x, \text{ car } \ln \text{ est strictement croissante sur }]0; +\infty[$$

$$\iff x \geq 0.$$

On en déduit donc le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f_1'(x)$		-	+
f_1	$+\infty$	1	$+\infty$

Justifions maintenant les deux limites :

On a $\lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} = \lim_{y \rightarrow -\infty} e^y = 0$, et donc par somme :

$$\lim_{+\infty} f_1 = +\infty.$$

Pour tout x on a : $f_1(x) = e^{-x} \times (xe^x + 1)$. Et on a : $\lim_{x \rightarrow -\infty} xe^x = 0$, d'après la propriété des croissances comparées.

On en déduit, par somme : $\lim_{x \rightarrow -\infty} xe^x + 1 = 1$.

Comme par ailleurs on a : $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-x} = \lim_{y \rightarrow +\infty} e^y = +\infty$, on en déduit, par produit : $\lim_{-\infty} f_1 = +\infty$.

Partie B

1. (a) Soit un entier naturel n non nul, et un réel x , choisi dans l'intervalle $[0; 1]$.

x étant dans l'intervalle $[0; 1]$, x est positif. La fonction exponentielle étant à valeurs strictement positives, on en déduit que e^{-nx} est également un nombre positif. La somme de deux nombres positifs étant elle-même positive, on en déduit que $f_n(x)$ est positif.

On a donc prouvé que pour tout entier naturel n , la fonction f_n est à valeurs positives sur l'intervalle $[0; 1]$.

I_n est donc l'intégrale sur un intervalle d'une fonction positive sur cet intervalle, c'est donc l'aire (exprimée en unité d'aire) de la portion de plan délimitée par : l'axe des abscisses; la courbe \mathcal{C}_n , représentative de f_n , et les droites verticales d'équation $x = 0$ (l'axe des ordonnées) et $x = 1$.

(b) Sur l'intervalle $[0; 1]$, il semble que, plus n augmente, plus les courbes \mathcal{C}_n semblent se rapprocher du segment d'équation $y = x$, chaque courbe semblant être en dessous de la courbe d'indice précédent.

On en déduit que les aires successives sous ces courbes doivent être de plus en plus petites, et donc que la suite (I_n) doit être décroissante.

Comme de plus il semble que les courbes "s'écrasent" sur le segment d'équation $y = x$, à la limite, l'aire sous la courbe devrait tendre vers l'aire sous le segment, c'est à dire $\frac{1}{2}$.

On peut donc émettre la conjecture que la suite converge vers $\frac{1}{2}$ en décroissant.

$$\begin{aligned}
2. \text{ On a : } I_{n+1} - I_n &= \int_0^1 f_{n+1}(x) \, dx - \int_0^1 f_n(x) \, dx \\
&= \int_0^1 (f_{n+1}(x) - f_n(x)) \, dx, \text{ par linéarité de l'intégrale.} \\
&= \int_0^1 (x + e^{-(n+1)x} - (x + e^{-nx})) \, dx \\
&= \int_0^1 (x + e^{-(n+1)x} - x - e^{-nx}) \, dx \\
&= \int_0^1 e^{-(n+1)x} (1 - e^x) \, dx
\end{aligned}$$

Ce que l'on souhaitait démontrer.

On va maintenant en déduire le signe de cette différence. Pour tout entier n naturel non nul et pour tout x dans l'intervalle $[0; 1]$, le nombre $e^{-(n+1)x}$ est strictement positif, car la fonction exponentielle est à valeurs strictement positives, quant au nombre $1 - e^x$, il est négatif, car x étant dans l'intervalle $[0; 1]$, on a $x \geq 0$, et comme la fonction exponentielle est strictement croissante sur \mathbf{R} , donc on en déduit que $e^x \geq e^0$, soit $e^x \geq 1$, donc il suit que $1 - e^x \leq 0$. Le produit de deux nombres de signes contraires étant négatif, on vient de prouver que, pour tout entier n naturel non nul et pour tout x dans l'intervalle $[0; 1]$, le nombre $e^{-(n+1)x} (1 - e^x)$ est négatif. L'intégrale entre deux bornes bien rangées d'une fonction négative étant négative, on en déduit que, pour tout entier n non nul, la différence $I_{n+1} - I_n$ est négative. On en déduit que la suite (I_n) est décroissante.

Comme par ailleurs, on a déjà prouvé que, pour tout n naturel non nul, la fonction f_n est à valeurs positives sur l'intervalle d'intégration $[0; 1]$, on en déduit que l'intégrale de cette fonction positive entre des bornes (0 et 1) bien rangées est positive, donc cela signifie que pour tout n naturel non nul, I_n est positif. On a donc prouvé que la suite est minorée par 0.

(I_n) étant une suite minorée et décroissante, on peut en conclure qu'elle est convergente vers une limite $\ell \geq 0$, car la suite est minorée par 0.

3. Nous allons maintenant déterminer cette limite ℓ . Pour tout entier n naturel non nul, une primitive de f_n sur l'intervalle $[0; 1]$ est définie par :

$$F_n(x) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{-1}{n}e^{-nx} = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{n}e^{-nx}. \text{ On a donc :}$$

$$I_n = \int_0^1 f_n(x) \, dx = \left[\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{n}e^{-nx} \right]_0^1 = F_n(1) - F_n(0)$$

$$I_n = \frac{1}{2} \times 1^2 - \frac{1}{n}e^{-n} - \left(\frac{1}{2} \times 0^2 - \frac{1}{n}e^0 \right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{n} \times (1 - e^{-n}).$$

Comme on a : $\lim_{n \rightarrow +\infty} e^{-n} = 0$, on en déduit que $\lim_{n \rightarrow +\infty} 1 - e^{-n} = 1$ et comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$, par produit, puis par somme de limites, on en déduit :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = \frac{1}{2}.$$

Finalement, nos deux conjectures sont bien vérifiées : la suite est bien décroissante, et converge vers une limite qui est bien $\frac{1}{2}$, l'aire sous la droite d'équation $y = x$ entre les abscisses 0 et 1.