Correction des exercices de démonstration par récurrence

Exercice I

Ecrire les propositions suivantes au rang $n+1$

1) $u_n = 14+n$ donne $u_{n+1} = 14+(n+1) = \boxed{15+n}$
2) $1 < u_n < 7$ donne $\boxed{1 < u_{n+1} < 7}$
3) $1^2+2^2+\cdots+n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ au rang n. (À gauche, on a une somme de n termes)
   Au rang $n+1$, on doit avoir une somme de $n+1$ termes :
   Donc $1^2+2^2+\cdots+n^2+(n+1)^2 = \dfrac{(n+1)((n+1)+1)(2(n+1)+1)}{6}$
   donc : $\boxed{1^2+2^2+\cdots+n^2+(n+1)^2 = \dfrac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}}$
4) 10^n-1 est un multiple de 9 donne $10^{n+1}-1$ est un multiple de 9.

Exercice II

Montrer que la suite définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = 4u_n - 3$ est constante égale à 1.
Effectuons démonstration par récurrence :

- **Initialisation** : $u_0 = 1$ donc la propriété est vraie pour $n = 0$.
- **Hérédité** :
  On suppose la propriété vraie au rang n donc $u_n = 1$.
  Alors : $u_{n+1}4u_n - 3 + 4\times 1 - 3 = 1$ donc $u_{n+1} = 1$.
  Pour tout n, $u_n = 1 \Rightarrow u_{n+1} = 1$.
  L'hérédité est vérifiée.
- **Conclusion** : d'après l'action de récurrence, la propriété est vraie pour tout n. La suite est constante, égale à 1.

Exercice III

Soit (u_n) la suite définie par $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = 2u_n - 5 \end{cases}$.

Montrons, par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 5 - 4\times 2^n$. Notons P_n cette propriété.

- **Initialisation** : au rang $n = 0$, $5-4\times 2^n = 5-4\times 2^0 = 5-4\times 1 = 5-4 = 1 = u_0$ donc :
  $\boxed{u_0 = 5-4\times 2^0}$; p_0 est vraie.
- **Hérédité** :
  On suppose la propriété vraie pour un rang n quelconque, donc $u_n = 5-4\times 2^n$ (hypothèse de récurrence).
  Alors, au rang $n+1$: $u_{n+1} = 2u_n - 5$ (par définition de la suite)
  $= 2\left(5-4\times 2^n\right) - 5$ (d'après l'hypoth!-èse de récurrence)
  $= 10 - 2\times\left(4\times 2^n\right) - 5 = 10 - 4\times 2\times 2^n - 5 = \boxed{5_4\times 2^{n+1}}$ ce qu'il fallait démontrer.
  On a montré que si p_n est vraie, alors p_{n+1} est vraie.
  La propriété est héréditaire.

D'après l'axiome de récurrence, elle est vraie pour tout n donc $\boxed{u_n = 5-'\times 2^n}$

Exercice IV Extrait du sujet de bac Polynésie juin 2012

Soit la suite (u_n) définie par $u_0 = 0$ et pour tout $n \geqslant 0$, $u_{n+1} = 3u_n - 2n + 3$.
Démontrons par récurrence sur n que, pour tout entier naturel n, $u_n \geqslant n$.

- **Initialisation :** $u_0 = 0 \geqslant 0$ donc la propriété est vraie au rang $n = 0$
- **Hérédité** : on suppose la propriété vraie au rang n, donc $u_n \geqslant n$.
  Alors $u_{n+1} = 3u_n - 2n + 3 \geqslant 3n - 2n + 3 \geqslant n + 3 \geqslant n + 1$ donc la propriété est vraie au rang $n+1$; elle est donc héréditaire.

D'après l'axiome de récurrence, la propriété est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.
$\boxed{\text{Pour tout } n \in \mathbb{N},\ u_n \geqslant n}$.

Exercice V

Montrer par récurrence que pour $n > 9$, $2^n > 100n$

- **Initialisation** : attention, on commence à $n = 10$.
  $2^{10} = 1\,024$ et $100n = 1\,000$ donc la propriété est vraie pour $n = 9$.
- **Hérédité** :
  On suppose la propriété vraie pour une valeur quelconque de n avec $n > 9$.
  Donc $2^n > 100n$.
  Alors : $2^{n+1} = 2 \times 2^n$ donc $2^{n+1} > 2 \times 100n = 100n + 100n > 100n + 100 = 100(n+1)$ car $n > 10$ donc $100n > 100$.
  On a montré que $\boxed{2^{n+1} > 100(n+1)}$