

# Correction des exercices sur les limites de fonctions

## Exercice I

Déterminer les limites en  $-\infty$  et  $+\infty$  des fonctions définies par les expressions suivantes :

a)  $f(x) = \frac{x^2 + 2}{1 - x}$ .

On a une forme indéterminée pour le calcul de la limite à l'infini.

$$f(x) = \frac{x^2 \left[ 1 + \frac{2}{x^2} \right]}{x \left( \frac{1}{x} - 1 \right)} = x \times \frac{1 + \frac{2}{x^2}}{\frac{1}{x} - 1}$$

- $\lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty$ ;  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left( 1 + \frac{2}{x^2} \right) = 1$  et  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left( \frac{1}{x} - 1 \right) = -1$ .

Par produit et quotient :  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$ .

- De même :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$  car la limite est celle de  $-x$ . (Voir calculs précédents)

b)  $g(x) = \frac{x+3}{-2x^2+1}$ .

On a une forme indéterminée.

$$\frac{x+3}{-2x^2+1} = \frac{x \left( 1 + \frac{3}{x} \right)}{x^2 \left( -2 + \frac{1}{x^2} \right)} = \frac{1}{x} \times \frac{1 + \frac{3}{x}}{-2 + \frac{1}{x^2}}$$

On a :

- $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left( \frac{1}{x} \right) = 0$
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left( 1 + \frac{3}{x} \right) = 1$
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left( -2 + \frac{1}{x^2} \right) = -2$ .

- par produit et quotient,  $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = 0$

Pour la limite en  $+\infty$ , on a la même réponse :

$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0$

On en déduit que l'axe des abscisses est asymptote à la courbe  $\mathcal{C}_g$

## Exercice II

a) Calcul de  $\lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x > 2}} \frac{x}{3x-6}$  :

- $\lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x > 2}} x = 2$
- $\lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x > 2}} (3x-6) = 0$  avec  $3x-6 > 0$

- Par quotient, on en déduit :  $\lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x > 2}} \left( \frac{x}{3x-6} \right) = +\infty$

b) Calcul de  $\lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x < 2}} \frac{x}{3x-6}$  :

- $\lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x < 2}} = 2$
- $\lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x < 2}} (3x-6) = 0$  avec  $3x-6 < 0$

- Par quotient :  $\lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x < 2}} \left( \frac{x}{3x-6} \right) = -\infty$  (quotient de 2, positif, par un nombre négatif)

c) Calcul de  $\lim_{\substack{x \rightarrow 4 \\ x > 4}} \frac{x^2}{4-x}$  :

- $\lim_{\substack{x \rightarrow 4 \\ x > 4}} x^2 = 16$
- $\lim_{\substack{x \rightarrow 4 \\ x > 4}} (4-x) = 0$  avec  $4-x < 0$

- Par conséquent :  $\lim_{\substack{x \rightarrow 4 \\ x > 4}} \left( \frac{x^2}{4-x} \right) = -\infty$

d) Calcul de  $\lim_{\substack{x \rightarrow 4 \\ x < 4}} \frac{x^2}{4-x}$  :

- $\lim_{\substack{x \rightarrow 4 \\ x < 4}} = 16$
- $\lim_{\substack{x \rightarrow 4 \\ x < 4}} (4-x) = 0$  avec  $4-x > 0$

- donc :  $\lim_{\substack{x \rightarrow 4 \\ x < 4}} \left( \frac{x^2}{4-x} \right) = +\infty$

e) Calcul de  $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} \left( 4 + \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2} \right)$  :

- $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} 4 = 4$
- $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} \frac{1}{x} = -\infty$
- $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} \left( \frac{2}{x^2} \right) = +\infty$

- Par somme et différence, on trouve :

$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} \left( 4 + \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2} \right) = -\infty$

f) Calcul de  $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \left( 4 + \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2} \right)$ .

- $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} 4 = 4$

- $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{1}{x} = +\infty$

- $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \left(\frac{2}{x^2}\right) = +\infty$

- Par somme et différence, on obtient une forme indéterminée!

- On lève l'indétermination :

On remarque que  $4 + \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2} = 4 + \frac{x-2}{x^2}$ .

$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} 4 = 4$ ;  $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} (x-2) = -2$  et  $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} x^2 = 0$  avec  $x^2 > 0$ .

On en déduit :  $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \left(\frac{x-2}{x^2}\right) = -\infty$

D'où :  $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \left(4 + \frac{x-2}{x^2}\right) = -\infty$

### Exercice III

On définit la fonction  $f$  par  $f(x) = \frac{3x+1}{5-x}$ .

On note  $\mathcal{C}$  la courbe représentative de  $f$  dans un repère orthonormé  $(O; \vec{i}; \vec{j})$ .

1)  $f$  est définie sur  $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{5\}$ .

2) On a une forme indéterminée.

$$\forall x \in \mathcal{D}, f(x) = \frac{x(3 + \frac{1}{x})}{x(\frac{5}{x} - 1)} = \frac{3 + \frac{1}{x}}{\frac{5}{x} - 1}$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(3 + \frac{1}{x}\right) = 3 \text{ et } \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{5}{x} - 1\right) = -1.$$

Par quotient,  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = -3$ .

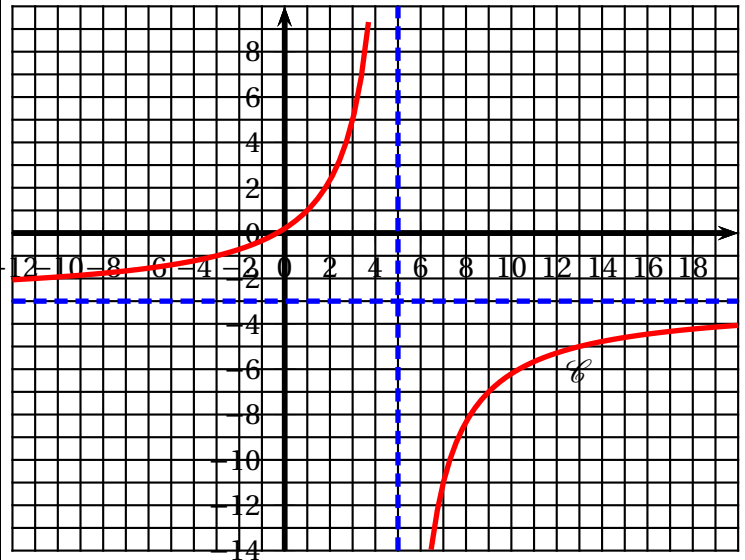
La droite d'équation  $y = -3$  est asymptote à  $\mathcal{C}$  en  $-\infty$  et en  $+\infty$ .

3)  $\forall x \in \mathcal{D}, f(x) - 3 = \frac{3x+1}{5-x} - (-3) = \frac{3x+1+3(5-x)}{5-x}$   
 $= \frac{3x+1+15-3x}{5-x} = \frac{16}{5-x}$

Comme 16 est positif,  $\frac{16}{5-x}$  est du signe de  $5-x$  sur  $\mathcal{D}$ .

$$5-x < 0 \iff x > 5 \text{ et } 5-x > 0 \iff x < 5.$$

$\mathcal{C}$  est au dessus de la droite d'équation  $y = -3$  sur  $]-\infty; 5[$  et en dessous sur  $]5; +\infty[$ .



### Exercice IV

On définit la fonction  $f$  par  $f(x) = \frac{2x^2 - 3x - 1}{x-1}$ .

On appelle  $\mathcal{C}$  la courbe représentative de  $f$  dans le repère orthonormé  $(O; \vec{i}; \vec{j})$  d'unité 1 cm.

1)  $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{1\}$

2) • Limite en  $-\infty$  et  $+\infty$  :

On a une forme indéterminée.

$$f(x) = \frac{x^2 \left(2 - \frac{3}{x} - \frac{1}{x^2}\right)}{x \left(1 - \frac{1}{x}\right)} = x \times \frac{2 - \frac{3}{x} - \frac{1}{x^2}}{1 - \frac{1}{x}}$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(2 - \frac{3}{x} - \frac{1}{x^2}\right) = 2 \text{ et } \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(-\frac{1}{x}\right) = 1 \text{ donc}$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2 - \frac{3}{x} - \frac{1}{x^2}}{1 - \frac{1}{x}} = 2.$$

On en déduit que :  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$  et

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty.$$

• Limite en 1 :

$$\lim_{x \rightarrow 1} (2x^2 - 3x - 1) = -2.$$

$\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} (x-1) = 0$  avec  $x-1 < 0$ , donc, par quotient :

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} f(x) = +\infty$$

$\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} (x-1) = 0$  avec  $x-1 > 0$ , donc, par quotient :

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} f(x) = -\infty$$

$\mathcal{C}$  admet comme asymptote la droite d'équation  $x = 1$ .

$$3) \text{ a) } \forall x \in \mathcal{D}, 2x - 2 - \frac{2}{x-1} = \frac{(2x-1)(x-1) - 2}{x-1} = \frac{2x^2 - 2x - x + 1 - 2}{x-1} = \frac{2x^2 - 3x - 1}{x-1} = f(x) \text{ donc}$$

$$f(x) = 2x - 1 - \frac{2}{x-1}$$

$$\text{b) Alors : } d(x) = f(x) - (2x - 1) = \frac{2}{x-1}.$$

$$\text{On en déduit : } \lim_{x \rightarrow \pm\infty} d(x) = 0.$$

c) Pour étudier la position de la droite  $\Delta$  par rapport à la courbe  $\mathcal{C}$ , on étudie le signe de  $f(x) - (2x - 1)$ , donc le signe de  $d(x)$ .

$d(x) = -\frac{2}{x-1}$  qui a le signe opposé de celui de  $x-1$ .

$$d(x) < 0 \iff x > 1 \text{ et } d(x) > 0 \iff x < 1.$$

$\mathcal{C}$  est au-dessus de  $\Delta$  pour  $x < 1$  et en dessous pour  $x > 1$ .

$$4) f(x) = 2x - 1 - 2 \times \frac{1}{x-1} \text{ donc } f'(x) = 2 - 2 \times \left( -\frac{1}{(x-1)^2} \right) = 2 + \frac{2}{(x-1)^2} > 0 \text{ sur } \mathcal{D}.$$

On en déduit que  $f$  est croissante sur  $]-\infty; 1[$  et sur  $]1; +\infty[$ .

5) Une équation de la tangente à la courbe  $\mathcal{C}$  en 2 est :

$$y = f'(2)(x-2) + f(2) \iff y = 4(x-2) + 1$$

$$\iff y = 4x - 7$$

6)

