Correction des exercices

I Tasse de café

1. $T' = \dfrac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t}$. D'après le texte, on a : $T' = k(T - T_0)$.
2. Cette équation différentielle se met sous la forme $T' = kT - T_0$ qui est de la forme $T' = aT + B$ avec $a = k$ et $b = -kT_0$. Les solutions sont de la forme $T(t) = \alpha e^{kt} - \dfrac{b}{a} = \boxed{\alpha e^{kt} + T_0}$ (où t est exprimé en minutes).
3. On a $T_0 = 20$; Ë $t = 0$, on a $T = 80$ donc $T(0) = 80 \Leftrightarrow \alpha - T_0 = 80 \Leftrightarrow \alpha = 80 - T_0 = 80 - 20 = 60$. $\boxed{T(t) = 60e^{kt} + 20}$.

   $T(2) = 60 \Leftrightarrow 60e^{kt} = 40 \Leftrightarrow e^{kt} = \dfrac{40}{60} = \dfrac{2}{3} \Leftrightarrow 2k = \ln\dfrac{2}{3} \Leftrightarrow \boxed{k = \dfrac{1}{2}\ln\dfrac{2}{3}}$. $T(t) = 60e^{\frac{t}{2}\ln\frac{2}{3}} + 20 = \left(\dfrac{t}{2}\right)^{\frac{2}{3}} + 20$.

   On résout alors l'équation $T(t) = 40$.

   $T(t) = 40 \Leftrightarrow 60e^{kt} + 20 = 40 \Leftrightarrow e^{kt} = \dfrac{1}{3} \Leftrightarrow t = \dfrac{1}{k}\ln\dfrac{1}{3} \approx 5,4$.

   il faudra attendre environ 5,4 minutes (5 min 24 s) pour qu'il ait son café à une température de 40 °C.

II Sujet 0 2020

Dans une boulangerie, les baguettes sortent du four à une température de 225 °C.

On s'intéresse à l'évolution de la température d'une baguette après sa sortie du four.

On admet qu'on peut modéliser cette évolution à l'aide d'une fonction f définie et dérivable sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$.

Dans cette modélisation, $f(t)$ représente la température en degré Celsius de la baguette au bout de la durée t, exprimée en heure, après la sortie du four.

Ainsi, $f(0,5)$ représente la température d'une baguette une demi-heure après la sortie du four.

Dans tout l'exercice, la température ambiante de la boulangerie est maintenue à 25 °C.

On admet alors que la fonction f est solution de l'équation différentielle $y' + 6y = 150$.

1. (a) $f(0)$ représente la température d'une baguette lors de sa sortie du four, c'est-à-dire 225 °C.

   (b) Pour résoudre l'équation, on la met sous la forme $y' = ay + b$ avec a et b des réels. On obtient :

   $$y' = -6y + 150 \iff y' = ay + b \text{ avec } \begin{cases} a = -6 \\ b = 150 \end{cases}$$

   On sait alors que les solutions de cette équation sont toutes les fonctions de la forme :

   $$f(t) = -\frac{b}{a} + C\mathrm{e}^{at},\ C \in \mathbb{R}$$

   Les solutions de l'équation différentielle sont donc toutes les fonctions de la forme :

   $$f(t) = -\frac{150}{-6} + C\mathrm{e}^{-6t}$$
   $$f(t) = 25 + C\mathrm{e}^{-6t}$$

   (c) La solution de l'équation différentielle a été obtenue en question **b.** Il reste à exploiter la condition initiale $f(t = 0) = f(0) = 225$ d'après la valeur trouvée à la question **a.** La fonction qui satisfait donc le modèle de l'exercice est la solution de l'équation :

   $$\begin{aligned} f(0) = 225 &\iff C\mathrm{e}^0 + 25 = 225 \\ &\iff C + 25 = 225 \\ &\iff C = 200 \end{aligned}$$

   Donc on a bien, pour tout réel $t \geqslant 0$:

   $$f(t) = 200\mathrm{e}^{-6t} + 25$$

2. Par expérience, on observe que la température d'une baguette sortant du four décroît et tend à se stabiliser à la température ambiante.

— Vérifions d'abord que la fonction f décroît. f est d'abord bien dérivable pour tout réel $t \geqslant 0$ comme composée de fonctions dérivables et :

$$\text{pour tout réel } t \geqslant 0,\ f'(t) = -1200\mathrm{e}^{-6t}$$

Or, pour tout réel $t \geqslant 0$:

$$\left\{\begin{array}{ll} \mathrm{e}^{-6t} & > 0 \\ -1200 & < 0 \end{array}\right. \Longrightarrow f'(t) < 0 \Longrightarrow f \text{ est bien décroissante (strictement).}$$

— Pour vérifier que la température tend à se stabiliser à la température ambiante (25 °C), nous allons calculer la limite de la fonction f en $+\infty$:

$$\lim_{t\to+\infty} \mathrm{e}^{-6t} = 0 \underset{\text{par produit}}{\Longrightarrow} \lim_{t\to+\infty} 200\mathrm{e}^{-6t} = 0 \underset{\text{par somme}}{\Longrightarrow} \lim_{t\to+\infty} 200\mathrm{e}^{-6t} + 25 = 25 = \lim_{t\to+\infty} f(t).$$

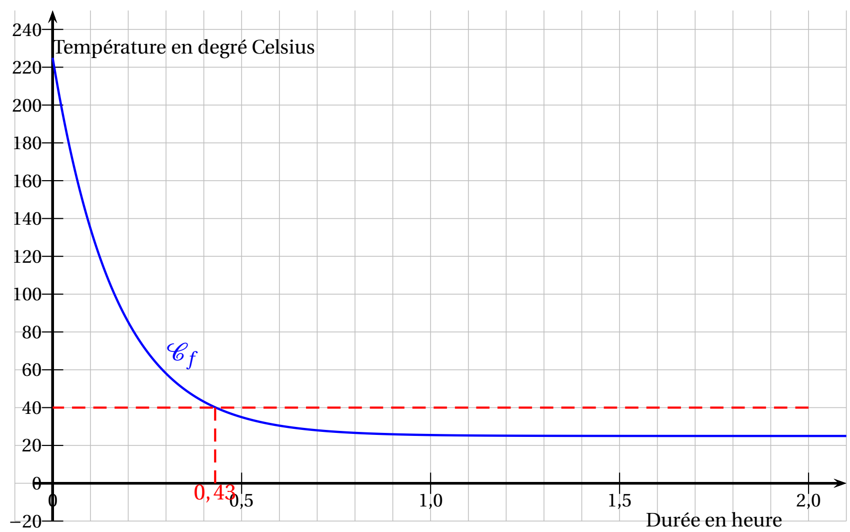
La fonction f, qui représente la température de la baguette (en °C) au bout du temps, a pour limite 25 en $+\infty$. Cela signifie donc bien que la température tend à se stabiliser à la température ambiante de 25 °C.

Donc la fonction f fournit un modèle en accord avec ces observations.

3. La fonction f est continue et décroissante strictement donc monotone sur $[0 : +\infty[$. Par ailleurs, $f(0) = 225$ et $\lim\limits_{t\to+\infty} f(t) = 25$ donc, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe un unique élément $c \in [0;+\infty[$ tel que $f(c) = 40$.

   Pour mettre les baguettes en rayon, le boulanger attend que leur température soit inférieure ou égale à 40 °C. On note $\mathcal{T}_0$ le temps d'attente minimal entre la sortie du four d'une baguette et sa mise en rayon.

   On donne la représentation graphique de la fonction f dans un repère orthogonal.



4. La courbe $\mathscr{C}_f$ semble atteindre 40 vers 0,43 heure soit $0,43 \times 60 = 25,8$ minutes. On trouve donc une valeur approchée de 26 minutes.

5. On s'intéresse ici à la diminution, minute après minute, de la température d'une baguette à sa sortie du four.

   Ainsi, pour un entier naturel n, D_n désigne la diminution de température en degré Celsius d'une baguette entre la n-ième et la $(n+1)$-ième minute après sa sortie du four.

   On admet que, pour tout entier naturel n : $D_n = f\left(\dfrac{n}{60}\right) - f\left(\dfrac{n+1}{60}\right)$.

   (a) On cherche une valeur approchée de D_0.

$$\begin{aligned} D_0 &= f\left(\frac{0}{60}\right) - f\left(\frac{1}{60}\right) \\ &= f(0) - f\left(\frac{1}{60}\right) \\ &= 200\mathrm{e}^0 + \cancel{25} - \left(200\mathrm{e}^{-\frac{6}{60}} + \cancel{25}\right) \\ &= 200 - 200\mathrm{e}^{-\frac{6}{60}} \\ &\approx 19,03 \end{aligned}$$

Donc 19 est bien une valeur approchée de $\mathscr{D}_0$ à 0,1 près. Cela signifie que la diminution de température qui se fait lors de la première minute après la sortie du four est d'environ 19 °C. Au bout d'une minute, la baguette est donc à $225-19=206$ °C.

(b)

$$\begin{aligned}
D_n &= f\left(\frac{n}{60}\right)-f\left(\frac{n+1}{60}\right)\\
&= 200\mathrm{e}^{-6\times\frac{n}{60}}+\cancel{25}-\left(200\mathrm{e}^{-6\times\frac{n+1}{60}}+\cancel{25}\right)\\
&= 200\mathrm{e}^{-0,1n}-200\mathrm{e}^{\frac{-6n-6}{60}}\\
&= 200\mathrm{e}^{-0,1n}-200\mathrm{e}^{\frac{-6n}{60}+\left(\frac{-6}{60}\right)}\\
&= 200\mathrm{e}^{-0,1n}-200\mathrm{e}^{-0,1n}\times\mathrm{e}^{-0,1}\\
\mathscr{D}_n &= 200\mathrm{e}^{-0,1n}\left(1-\mathrm{e}^{-0,1}\right)
\end{aligned}$$

Pour étudier le sens de variation de la suite (D_n), on étudie le signe de $D_{n+1}-D_n$.
Pour tout entier naturel n :

$$\begin{aligned}
D_{n+1}-D_n &= 200\mathrm{e}^{-0,1(n+1)}\left(1-\mathrm{e}^{-0,1}\right)-200\mathrm{e}^{-0,1n}\left(1-\mathrm{e}^{-0,1}\right)\\
&= 200\mathrm{e}^{-0,1n}\times\mathrm{e}^{-0,1}\left(1-\mathrm{e}^{-0,1}\right)-200\mathrm{e}^{-0,1n}\left(1-\mathrm{e}^{-0,1}\right)\\
D_{n+1}-D_n &= 200\mathrm{e}^{-0,1n}\left(1-\mathrm{e}^{-0,1}\right)\left[\mathrm{e}^{-0,1}-1\right]
\end{aligned}$$

Étudions le signe de cette expression pour tout entier naturel n :

$$\left\{\begin{array}{ll} 200\mathrm{e}^{-0,1n} & \geqslant 0\\ 1-\mathrm{e}^{-0,1} & \geqslant 0\\ \mathrm{e}^{-0,1}-1 & \leqslant 0\end{array}\right. \underset{\text{par produit}}{\Longrightarrow} \mathscr{D}_{n+1}-\mathscr{D}_n\leqslant 0 \Longrightarrow \text{la suite } (\mathscr{D}_n) \text{ est décroissante.}$$

Calculons alors la limite de cette suite :

$$\left\{\begin{array}{ll} \lim\limits_{n\to+\infty} 200\mathrm{e}^{-0,1n} & =0\\ \lim\limits_{n\to+\infty} 1-\mathrm{e}^{-0,1} & =1-\mathrm{e}^{-0,1}\\ \lim\limits_{n\to+\infty} \mathrm{e}^{-0,1}-1 & =\mathrm{e}^{-0,1}-1\end{array}\right. \underset{\text{par produit}}{\Longrightarrow} \lim_{n\to+\infty} D_n=0$$

Nous trouvons une limite de 0 pour D_n. Puisque la baguette tend à se stabiliser à la température ambiante, la diminution de température entre la n-ième et la $(n+1)$-ième minute va tendre vers 0. Le résultat était bien prévisible dans le contexte de l'exercice.