Correction des exercices sur la convexité

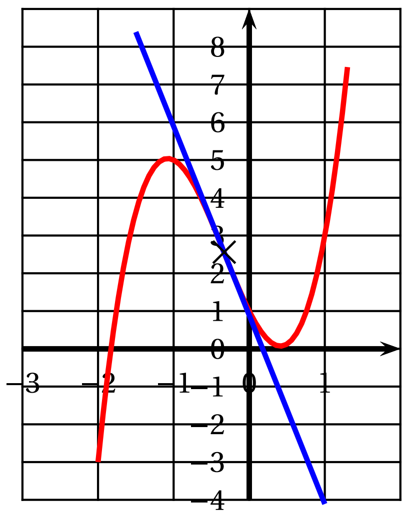
Exercice I

Pour tout réel x, on pose $f(x) = 3x^3 + 3x^2 - 4x + 1$.

1) • $\boxed{f'(x) = 9x^2 + 6x - 4}$
   • $\boxed{f''(x) = 18x + 6 = 6(3x+1)}$

2) f est convexe si, et seulement si, f'' est positive.
   Il est clair que f'' est positive sur $\left[-\dfrac{1}{3}\ ;\ +\infty\right]$ et négative sur $\left]-\infty\ ;\ -\dfrac{1}{3}\right]$.
   f est convexe sur $\left[-\dfrac{1}{3}\ ;\ +\infty\right]$ et concave sur $\left]-\infty\ ;\ -\dfrac{1}{3}\right]$.

3) f'' s'annule et change de signe pour $x = -\dfrac{1}{3}$ donc le point d'abscisse $-\dfrac{1}{3}$ est un point d'inflexion.
   Graphiquement, cela signifie que la courbe traversa sa tangente en $-\dfrac{1}{3}$.
   Voir courbe ci-dessous.



Exercice II

On considère la fonction $f : x \mapsto \sqrt{x}$, définie sur $[0\ ;\ +\infty[$.

1) • $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$
   • $f = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{1}{u}$ avec $u(x) = \sqrt{x}$.
   Alors : $f'' = \dfrac{1}{2} \times \left(-\dfrac{u'}{u^2}\right)$ avec $u'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.
   Donc $f''(x) = \dfrac{1}{2} \times \left(-\dfrac{\frac{1}{2\sqrt{x}}}{\left(\sqrt{x}\right)^2}\right) = -\dfrac{1}{4} \times \dfrac{1}{x\sqrt{x}}$.

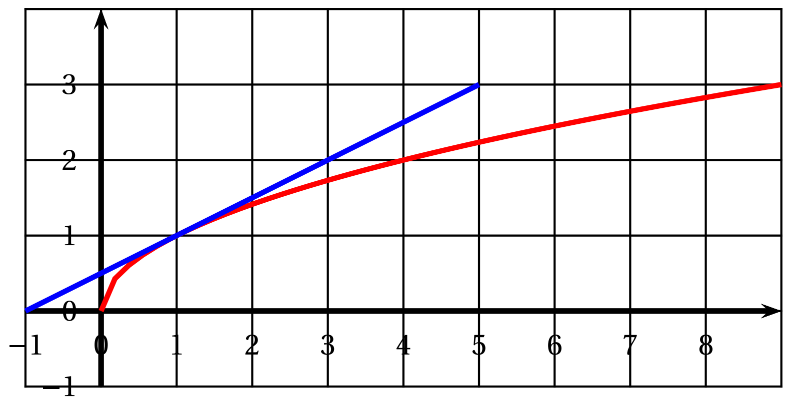
2) Pour tout $x > 0$, $f''(x) < 0$ donc f est concave.

3) L'équation réduite de la tangente au point d'abscisse 1 est :
   $y = f'(1)(x-1) + f(1) \iff y = \dfrac{1}{2}(x-1) + 1 \iff y = \dfrac{1}{2}x + \dfrac{1}{2}$.

4) f est concave, donc $\mathscr{C}_f$ est en dessous de toutes ses tangentes, en particulier la tangente en 1.

On en déduit que, pour tout $x \geqslant 0$, $f(x) \leqslant \dfrac{1}{2}x + \dfrac{1}{2} \iff \boxed{\sqrt{x} \leqslant \dfrac{1}{2}x + \dfrac{1}{2}}$.

Illustration graphique :



Exercice III

Soit n un entier naturel non nul. On considère la fonction $f : x \mapsto (1+x)^n$.

1)
- $f'(x) = n(1+x)^{n-1}$ sur $[0\,;\,+\infty[$
- $f''(x) = n(n-1)(1+x)^{n-2}$

   $f''(x) \geqslant 0$ sur $[0\,;\,+\infty]$ donc f est convexe sur cet intervalle.

2) La tangente au point d'abscisse 0 a pour équation réduite :
   $y = f'(0)(x-0) + f(0) \iff y = nx + 1$

3) Comme f est convexe, Issa courbe est au-dessus de ses tangentes, en particulier la tangente en 0.
   On en déduit que, pour tout $x \geqslant 0$, $f(x) \geqslant nx + 1$ donc $\boxed{(1+x)^n \geqslant 1 + nx}$.
   On retrouve l'inégalité de Bernoulli.