

Spécialité : correction du DM n° 2

Exercice I Suite homographique

Soit la suite (u_n) définie par $u_0 = 2$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} = \frac{3u_n + 2}{u_n + 4}.$$

1) • $u_1 = \frac{3u_0 + 2}{u_0 + 4} = \frac{3 \times 2 + 2}{2 + 4} = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}$; $u_1 = \frac{4}{3}$

• $u_2 = \frac{3u_1 + 2}{u_1 + 4} = \frac{3 \times \frac{4}{3} + 2}{\frac{4}{3} + 4} = \frac{6}{\frac{16}{3}} = 6 \times \frac{3}{16} = \frac{2 \times 3 \times 3}{2 \times 8} = \frac{9}{8}$;

$u_2 = \frac{9}{8}$

2) Montrons par récurrence que $u_n \neq 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$:

• **Initialisation** : $u_0 = 2 \neq 1$ donc la propriété est vraie pour $n = 0$.

• On suppose que $u_n \neq 1$ pour une valeur quelconque de n .

$$u_{n+1} - 1 = \frac{3u_n + 2}{u_n + 4} - 1 = \frac{3u_n + 2 - u_n - 4}{u_n + 4} = \frac{2u_n - 2}{u_n + 4} = \frac{2(u_n - 1)}{u_n + 4} \neq 0 \text{ puisque } u_n \neq 1.$$

La propriété est héréditaire.

D'après l'axiome de récurrence, la propriété vraie pour tout n , donc $u_n \neq 1$.

3) On pose $v_n = \frac{u_n + 2}{u_n - 1}$.

a) Pour tout n ,

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= \frac{u_{n+1} + 2}{u_{n+1} - 1} \\ &= \frac{\frac{3u_n + 2}{u_n + 4} + 2}{\frac{3u_n + 2}{u_n + 4} - 1} \\ &= \frac{\frac{3u_n + 2 + 2(u_n + 4)}{u_n + 4}}{\frac{3u_n + 2 - (u_n + 4)}{u_n + 4}} \\ &= \frac{5u_n + 10}{u_n + 4} \times \frac{u_n + 4}{2u_n - 2} \\ &= \frac{5(u_n + 2)}{2(u_n - 1)} \\ &= \frac{5}{2} \times \frac{u_n + 2}{u_n - 1} \\ &= \frac{5}{2} v_n \end{aligned}$$

Pour tout n , $v_{n+1} = \frac{5}{2} v_n$ donc la suite (v_n) est géométrique, de raison

$q = \frac{5}{2}$

Son premier terme est $v_0 = \frac{u_0 + 2}{u_0 - 1} = \frac{2 + 2}{2 - 1} = 4$.

b) On en déduit : $v_n = 4 \times \left(\frac{5}{2}\right)^n$

c) $v_n = \frac{u_n + 2}{u_n - 1} \iff v_n(u_n - 1) = u_n + 2$
 $\iff u_n v_n - u_n = v_n + 2 \iff u_n(v_n - 1) = v_n + 2$
 $\iff \frac{u_n + 2}{v_n - 1} = u_n$

On remplace v_n par son expression.

On obtient : $u_n = \frac{4 \times \left(\frac{5}{2}\right)^n + 2}{4 \times \left(\frac{5}{2}\right)^n - 1}$

Exercice II

Soit la suite (u_n) définie pour tout entier n par :

$$\begin{cases} u_0 = 5 \\ u_{n+1} = \sqrt{2u_n - 1} \end{cases}$$

1) Soit P_n la propriété « $1 \leq u_{n+1} \leq u_n \leq 3$ » pour $n \in \mathbb{N}^*$.
 Démontrons-la par récurrence.

• **Initialisation** : $u_0 = 5$, $u_1 = \sqrt{2u_0 - 1} = \sqrt{2 \times 5 - 1} = \sqrt{9} = 3$ et $u_2 = \sqrt{5}$ donc $1 \leq u_2 \leq u_1 \leq 3$.

P_1 est vraie.

• **Hérédité** : On suppose P_n vraie pour un entier n quelconque non nul, donc $1 \leq u_{n+1} \leq u_n \leq 3$.

Alors :

$$\begin{aligned} 1 &\leq u_{n+1} \leq u_n \leq 3 \\ \Rightarrow 2 &\leq 2u_{n+1} \leq 2u_n \leq 6 \\ \Rightarrow 2 - 1 &\leq 2u_{n+1} - 1 \leq 2u_n - 1 \leq 6 - 1 \\ \Rightarrow 1 &\leq 2u_{n+1} - 1 \leq 2u_n - 1 \leq 5 \\ \Rightarrow \sqrt{1} &\leq \sqrt{2u_{n+1} - 1} \leq \sqrt{2u_n - 1} \leq \sqrt{5} \\ \text{car la fonction racine carrée est croissante} \\ \Rightarrow 1 &\leq u_{n+1} \leq u_{n+1} \leq \sqrt{5} \leq 3. \end{aligned}$$

P_n est donc **héréditaire**.

D'après l'axiome de récurrence, la propriété P_n est vraie pour tout n .

2) On en déduit que :

- (u_n) est minorée par 1.
- (u_n) est décroissante puisque $u_{n+1} \leq u_n$

Par conséquent, la suite est **convergente** vers une limite ℓ avec $\ell \geq 1$. (La limite n'est pas demandée!)

Exercice III Conformité à un modèle

On modélise le taux de disponibilité des ressources par la suite (T_n) , définie sur \mathbb{N} par $T_0 = 0,9$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $T_{n+1} = T_n - 0,1(T_n)^2$, où n est le nombre d'années écoulées depuis 2020.

1) On peut remarquer que $T_{n+1} = T_n(1 - 0,1T_n)$. Le taux en 2025 est T_5 . On a successivement :

- $T_1 = T_0(1 - 0,1T_0) = 0,9(1 - 0,1 \times 0,9) = 0,9 \times (1 - 0,09) = 0,9 \times 0,91 = 0,819$: $T_1 = 0,819$
- $T_2 = T_1(1 - 0,1T_1) \approx 0,751924$: $T_2 \approx 0,751924$
- $T_3 \approx 0,695385$
- $T_4 \approx 0,647029$
- $T_5 = 0,605164 \approx 0,6$

L'affirmation est donc conforme au modèle.

2) Soit $f(x) = x - 0,1x^2$.

$$f'(x) = 1 - 0,2x \text{ qui s'annule pour } x = \frac{1}{0,2} = \frac{10}{2} = 5.$$

Sur $[0; 1]$, $f'(x) > 0$ donc f est croissante.

x	0	1
$f'(x)$		+
$f(x)$	0	0,9

3) Montrons que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq T_{n+1} \leq T_n \leq 1$.

Effectuons une démonstration par récurrence :
Notons P_n la propriété : « $0 \leq T_{n+1} \leq T_n \leq 1$ ».

- **Initialisation** : $T_0 = 0,9$ et $T_1 = 0,81 < T_0$ donc P_0 est vraie.
- **Hérédité** : on suppose P_n vraie pour une valeur quelconque de n donc $0 \leq T_{n+1} \leq T_n \leq 1$.
On remarque que $T_{n+1} = f(T_n)$.
 f est croissante donc respecte l'ordre.
Alors : $0 \leq T_{n+1} \leq T_n \leq 1$
 $\Rightarrow f(0) \leq f(T_n) \leq f(1)$
 $\Rightarrow 0 \leq T_{n+2} \leq T_{n+1} \leq 0,9 < 1$.
 P_{n+1} est vraie.
 (P_n) est **héréditaire**.

D'après l'axiome de récurrence, la propriété P_n est vraie pour tout n .

4) $T_{n+1} \leq T_n$ pour tout n donc la suite (T_n) est décroissante; de plus, elle est minorée, donc, d'après le théorème de convergence monotone, elle est convergente, vers une limite $\ell \geq 0$.

5) On a : $T_{13} \approx 0,400844524 > 0,4$ et $T_{14} \approx 0,38477689$.
Le taux de disponibilité des ressources va passer en dessous de 40 % et ce, au bout de 14 ans, donc en 2034.

Exercice IV

Étudions les variations sur $] -2; 1[$ de la fonction f définie par $f(x) = \frac{-5x^2 + 4x - 8}{x^2 + x - 2}$.

Remarquons que -2 et 1 sont les racines du dénominateur donc f est bien définie sur $] -2; 1[$.

$$f = \frac{u}{v} \text{ avec } \begin{cases} u(x) = -5x^2 + 4x - 9 \\ v(x) = x^2 + x - 2 \end{cases}$$

$$f' = \frac{u'v - uv'}{v^2} \text{ avec } \begin{cases} u'(x) = -10x + 4 \\ v'(x) = 2x + 1 \end{cases}$$

Alors :

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(-10x+4)(x^2+x-2) - (2x+1)(-5x^2+4x-8)}{(x^2+x-2)^2} \\ &= \frac{-10x^3 - 10x^2 + 20x + 4x^2 + 4x - 8 - (-10x^3 + 8x^2 - 16x - 5x^2 + 4x - 8)}{(x^2+x-2)^2} \\ &= \frac{-10x^3 - 10x^2 + 20x + 4x^2 + 4x - 8 + 10x^3 - 8x^2 + 16x + 5x^2 - 4x + 8}{(x^2+x-2)^2} \\ &= \frac{-9x^2 + 36x}{(x^2+x-2)^2} = \frac{-9x(x-4)}{(x^2+x-2)^2} \end{aligned}$$

$f'(x)$ s'annule en 0 et 4 et est du signe du numérateur $-9x(x-4)$, positif (du signe opposé à celui du coefficient de x^2) entre les racines et du signe opposé à l'extérieur de l'intervalle formé par les racines.

Limites en -2 et en 1 :

- $\lim_{x \rightarrow -2} (-5x^2 + 4x - 8) = -36$
- $\lim_{x \rightarrow -2} (x^2 + x - 21) = 0$ en étant négatif.
- Par quotient : $\lim_{\substack{x \rightarrow -2 \\ x > -2}} f(x) = +\infty$.
- $\lim_{x \rightarrow 1} (-5x^2 + 4x - 8) = -9$
- $\lim_{x \rightarrow 1} (x^2 + x - 21) = 0$ en étant négatif.
- Par quotient : $\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > -2}} f(x) = +\infty$.

Tableau de variation

x	-2	0	1	
$f'(x)$		+	0	-
$f(x)$	$-\infty$		4	$-\infty$

Exercice V

On considère la fonction f définie par :

$f(x) = \frac{2x^2 + 6x + 1}{x^2 + 2}$. Soit \mathcal{C} la courbe représentative de f dans un repère orthonormal.

1. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x^2 + 2 > 0$ donc l'ensemble de définition de f est $\mathcal{D} = \mathbb{R}$

2. $f = \frac{u}{v}$ avec $\begin{cases} u(x) = 2x^2 + 6x + 1 \\ v(x) = x^2 + 2 \end{cases}$

$f' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$ avec $\begin{cases} u'(x) = 4x + 6 \\ v'(x) = 2x \end{cases}$

$$f'(x) = \frac{(4x+6)(x^2+2) - 2x(2x^2+6x+1)}{(x^2+2)^2}$$

$$= \frac{4x^3 + 8x + 6x^2 + 12 - 4x^3 - 12x^2 - 2x}{(x^2+2)^2}$$

$$= \frac{-6x^2 + 6x + 12}{(x^2+2)^2} = \frac{-6(x^2 - x - 2)}{(x^2+2)^2}$$

-1 est une racine évidente de $x^2 - x - 2$; le produit des racines est $\frac{-2}{1} = -2$ donc l'autre racine est 2.

Alors : $f'(x) = \frac{-6(x+1)(x-2)}{(x^2+2)^2}$

$f'(x) = 0$ pour $x = -1$ ou $x = 2$.

$f'(x)$ est du signe de $-6(x+1)(x-2)$.

$-6(x+1)(x-2)$ est du signe du coefficient de x^2 , -6, donc négatif à l'extérieur de l'intervalle formé par les racines et positif entre les racines.

3. Tableau de variation sur $[-10; 10]$.

x	-10	-1	2	10
$f'(x)$		-	+	-
$f(x)$	$\frac{47}{34}$		$\frac{7}{2}$	$\frac{87}{34}$
		↘ -1 ↗		

4. L'équation de la tangente T à \mathcal{C} en son point d'abscisse 0 est :

$$y = f'(0)(x-0) + f(0) \iff y = f'(0)x + f(0)$$

$$\iff y = 3x + \frac{1}{2}$$

Courbe à la fin du corrigé

5. Pour trouver le nombre de points d'intersection de \mathcal{C} et de T , on résout l'équation $f(x) = 3x + \frac{1}{3}$.

$$f(x) = 3x + \frac{1}{2} \iff \frac{2x^2 + 6x + 1}{x^2 + 2} = 3x + \frac{1}{2}$$

$$\iff \frac{2x^2 + 6x + 1}{x^2 + 2} - \left(3x + \frac{1}{2}\right) = 0$$

$$\iff \frac{2x^2 + 6x + 1}{x^2 + 2} - \frac{6x + 1}{2} = 0$$

$$\iff \frac{2(2x^2 + 6x + 1) - (6x + 1)(x^2 + 2)}{2(x^2 + 2)} = 0$$

$$\iff \frac{4x^2 + 12x + 2 - 6x^3 - 12x - x^2 - 2}{2(x^2 + 2)} = 0$$

$$\iff \frac{-6x^3 + 3x^2}{(x^2 + 2)^2} = 0 \iff -6x^3 + 3x^2 = 0$$

$$\iff 3x^2(-2x + 1) = 0.$$

$$\mathcal{S} = \left\{0; \frac{1}{2}\right\}.$$

\mathcal{C} et T ont deux points d'intersection, de coordonnées $\left(0; \frac{1}{2}\right)$ (point de tangence) et $\left(\frac{1}{2}; 2\right)$.

Le signe de $f(x) - \left(3x + \frac{1}{2}\right)$ est celui de $3x^2(-2x + 1)$.

$3x^2(-2x + 1)$ s'annule en 0 et $\frac{1}{2}$.

$3x^2 \geq 0$ et $-2x + 1 \geq 0 \iff x \leq \frac{1}{2}$. Tableau de signes :

x	-10	0	$\frac{1}{2}$	10
$f(x) - \left(3x + \frac{1}{2}\right)$		+	+	-

\mathcal{C} est au-dessus de la tangente T pour $x \leq \frac{1}{2}$ et en dessous pour $x \geq \frac{1}{2}$ (avec point de tangence en $x = 0$)

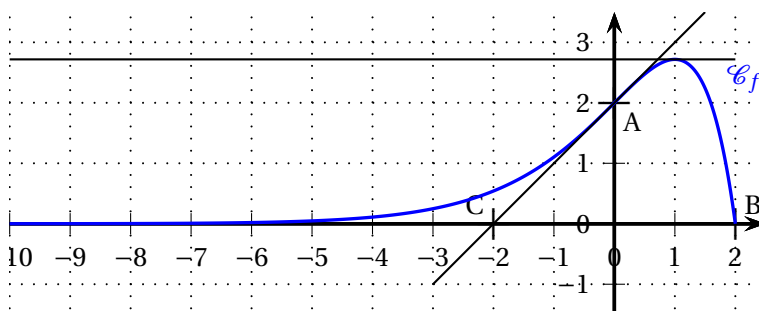
Exercice VI

Partie A

Dans le repère ci-dessous, on note \mathcal{C}_f la courbe représentative d'une fonction f définie sur l'intervalle $[-10; 2]$. On a placé les points A(0; 2), B(2; 0) et C(-2; 0).

On dispose des renseignements suivants :

- Le point B appartient à la courbe \mathcal{C}_f .
- La droite (AC) est tangente en A à la courbe \mathcal{C}_f .
- La tangente à la courbe \mathcal{C}_f au point d'abscisse 1 est une droite horizontale.



Répondre aux questions suivantes par lecture graphique.

- $f(0) = y_A = 2$; $f(0) = 2$
- $f(2) = y_B = 0$; $f(2) = 0$

2. $f'(1)$ est le coefficient directeur de la tangente en 1.

$$\boxed{f'(1) = 0} \text{ (tangente horizontale)}$$

3. Une équation de la tangente à la courbe \mathcal{C}_f au point A est :

$$y = f'(1)(x-1) + f(1).$$

$$f'(1) = \frac{y_A - y_C}{x_C - x_A} = \frac{2}{2} = 1; \quad \boxed{f'(1) = 1} \text{ On en déduit :}$$

$$y = 1 \times (x-0) + 2 \iff \boxed{y = x+2}.$$

4. L'équation $f(x) = 1$ semble avoir deux solutions.

5. f semble croissante sur $[-10 ; 1]$ puis décroissante sur $[1 ; 2]$.

Tableau de variation :

x	-10	1	2
$f'(x)$	$12e^{-10} \approx 0,0005$	e	0

(b) Sur $[-10 ; 1]$, $f(x)$ pass d'environ 0,0005 à $e \approx 2,7$ donc passe par 1; sur $[1 ; 2]$, $f(x)$ passe de e à 0 donc passe par 1.

L'équation $f(x) = 1$ a donc deux solutions.

À la calculatrice, on trouve que les deux solutions sont $\boxed{x_1 \approx -1,15}$ et $\boxed{x_2 \approx 1,84}$.

Remarque : nous verrons cette démarche plus en détail dans un prochain chapitre.

Partie B

Dans cette partie, on cherche à vérifier par le calcul les résultats lus graphiquement dans la partie A.

On sait désormais que la fonction f est définie sur l'intervalle $[-10 ; 2]$ par : $f(x) = (2-x)e^x$.

1. • $f(0) = 2e^0 = 2; \quad \boxed{f(0) = 2}$

• $\boxed{f(2) = 0}$

item $f = uv$ donc $f' = u'v + uv'$ avec

$$\begin{cases} u(x) = x-2 \\ v(x) = e^x \end{cases} \text{ et } \begin{cases} u'(x) = -1 \\ v'(x) = e^x \end{cases}.$$

Alors : $f'(x) = -e^x + (2-x)e^x = [-1+2-x]e^x$
donc $\boxed{f'(x) = (1-x)e^x}$.

(a) Alors : $f'(1) = 0 \times e^1 = 0; \quad \boxed{f'(1) = 0}$

2. Une équation de la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse 0 est :

$$y = f'(0) \times x + f(0) \iff y = 1x + 2 \iff \boxed{y = x+2}.$$

3. (a) $f'(x) = (1-x)e^x$ est du signe de $1-x$ car $e^x > 0$.
 $f'(x) \geq 0$ pour $x \leq 1$ et $f'(x) \leq 0$ pour $x \geq 1$.

Courbe de l'exercice V

