Variable aléatoire réelle sur un ensemble fini

Table des matières

I Variable aléatoire

I.1 Exemple

On considère l'expérience aléatoire suivante :
un joueur lance un dé cubique équilibré : si le résultat est 6, le joueur gagne 9 €, sinon le joueur perd 3 €.
On peut considérer le « gain algébrique » du joueur : ce gain est égal soit à 9 (s'il gagne), soit à -3 (s'il perd).
Ce gain est donc une **variable** qui peut prendre deux valeurs selon le résultat de l'expérience aléatoire
On peut modéliser cette expérience aléatoire en définissant un univers composé des six issues correspondant aux résultats du dé, puis en associant à chacune de ces issues une valeur du gain.
$\Omega = \{1 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6\}$.
Résumons cela dans un tableau :

Résultat du dé	1	2	3	4	5	6
Valeur du gain	-3	-3	-3	-3	-3	9

I.2 Variable aléatoire

Définition

On considère une expérience aléatoire dont l'univers est un ensemble fini noté Ω.
Une **variable aléatoire** X est une **fonction** définie sur Ω et à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Exemple : un joueur participe à un jeu et mise 4 €. Il lance un dé cubique.
S'il obtient un six, il gagne 6 €, s'il obtient un deux ou un trois, il gagne 5 €, sinon, il perd 3 €.
On note X le gain algébrique.
X est une fonction de Ω sur $\mathbb{R}$:

Résultat du dé	1	2	3	4	5	6
Valeur du gain	-7	1	1	-7	-7	2

(Ne pas oublier de soustraire la mise!)

I.3 Loi de probabilité

Définition

Donner la loi de probabilité d'une variable aléatoire X, c'est donner, pour chaque valeur x_i que peut prendre X, la probabilité de l'évènement $\{X = x_i\}$, notée $p\,(X = x_i)$.

Exemple : dans l'exemple précédent, $p(X=1) = \dfrac{1}{3}$, car le dé étant équilibré, chaque face a une probabilité de $\dfrac{1}{6}$ de survenir.

II Paramètres d'une variable aléatoire

Définition

On considère une expérience aléatoire d'univers fini Ω et une loi de probabilité p associée à cette expérience.
Soit X une variable aléatoire définie sur Ω et qui prend n valeurs x_1, x_2,..., x_n de probabilités respectives p_1, p_2, ..., p_n

x_i	x_1	x_2	$\cdots$	x_n
$p(X = x_i)$	p_1	p_2	$\cdots$	p_n

- L'espérance de X est le nombre noté $E(X)$ défini par :

  $$E(X) = x_1 p_1 + x_2 p_2 + \cdots + x_n p_n.$$

  L'espérance correspond à la notion de moyenne.
- La variance de X est le nombre noté $V(X)$ défini par :

  $$V(X) = p1\,(x_1 – E(X))^2 + \cdots + p_n\,(x_n – E(X))^2$$

  .
- L'écart type de X est le nombre noté $\sigma(X)$ défini par : $\sigma(X) = \sqrt{VX}$.

Remarque : l'écart-type permet de mesurer la dispersion autour de la moyenne, donc autour de l'espérance.

Remarque :.
Les mathématiciens ont inventé une notation pour écrire des sommes.
On écrit : $E(X) = \displaystyle\sum_{i=1}^{i=n} x_i p_i$ (se lit somme pour i prenant toutes les valeurs de 1 à n des nombres $x_i p_i$).
De même : $V(X) = \displaystyle\sum_{i=1}^{i=n} (x_i - E(X))^2$.

Reprenons l'exemple du jeu avec un dé :

Résultat du dé	1	2	3	4	5	6
x_i (Valeur du gain)	-7	1	1	-7	-7	2
p_i (Probabilité)	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

L'espérance est $E(X) = -7 \times \frac{1}{6} + 1 \times \frac{1}{6} + 1 \times \frac{1}{6} + (-7) \times \frac{1}{6} + (-7) \times \frac{1}{6} + 2 \times \frac{1}{6} = \boxed{-\frac{17}{6}}$.
$E(X) < 0$ donc en moyenne, le joueur perd de l'argent sur un grand nombre de parties.

Exercice

Montrer que $V(X) = p_1 x_1^2 + p_2 x_2^2 + \cdots + p_n x_n^2 - [E(X)]^2$

Justification :
On utilise, pour chaque valeur de i, l'identité remarquable $(x_i - E(X))^2 = x_i^2 - 2x_i E(X) + [E(X)]^2$.
On en déduit :
$V(X) = p1\,(x_1 - E(X))^2 + \cdots + p_n\,(x_n - E(X))^2$
$= p_1\left(x_1^2 - 2x_1 E(X) + [E(X)]^2\right) + p_2\left(x_2^2 - 2x_2 E(X) + [E(X)]^2\right) + \cdots + p_n\left(x_n^2 - 2x_n E(X) + [E(X)]^2\right)$
$= \left[p_1 x_1^2 + p_2 x_2^2 + \cdots + p_n x_n^2\right] - 2\left(p_1 x_1 + p_2 x_2 + \cdots + p_n x_n\right) E(X) + \left(p_1 + p_2 + \cdots + p_n\right)[E(X)]^2$
$= \left[p_1 x_1^2 + p_2 x_2^2 + \cdots + p_n x_n^2\right] - 2E(X) \times E(X) + 1 \times [E(X)]^2$ car $p_1 x_1 + p_2 x_2 + \cdots + p_n x_n = E(X)$ et $p_1 + p_2 + \cdots + p_n = 1$.
Alors : $E(X) = p_1 x_1 + p_2 x_2 + \cdots + p_n x_n - 2[E(X)]^2 + [E(X)]^2$
$= p_1 x_1 + p_2 x_2 + \cdots + p_n x_n - [E(X)]^2$.

Symboliquement, on écrit : $\boxed{V(V) = E\left(X^2\right) - [E(X)]^2}$