Devoir sur feuille nº 1
(à rendre sur copie double)

« Si les gens ne croient pas que les mathématiques sont simples, c'est uniquement parce qu'ils ne réalisent pas à quel point la vie est compliquée. »(Von Neumann)

I

Dans chaque cas, résoudre l'équation $P(x)=0$, en réfléchissant à la meilleure stratégie.

a) $P(x)=8x^2+64x$

b) $P(x)=3x^2-6x+3$

c) $P(x)=5x^2-125$

d) $P(x)=3x^2-5x-7$

II

On définit la fonction f sur $]0\,;\,+\infty[$ par :

$$f(x)=x^3-\frac{10}{x}.$$

.

1. Étudier les variations de f sur $]0\,;\,+\infty[$.
2. On pose $A=\left(\sqrt{2}\right)^3-\dfrac{10}{\sqrt{2}}$ et $B=(1{,}42)^3-\dfrac{10}{1{,}42}$.
   Comparer, **sans calculatrice** et en justifiant les nombres A et B.

III

On considère la fonction f, définie sur $\mathbb{R}$, par :

$$f(x)=4x^3-x^2-70x$$

1. Étudier, en expliquant soigneusement, les variations de la fonction f.
2. Dresser alors le tableau de variation de la fonction f

IV

Le plan est muni d'un repère orthonormé.

Soit f la fonction définie par $f(x)=\dfrac{x^2-x-2}{x^2-x+1}$.

Soit $\mathscr{C}_f$ sa représentation graphique.

1) Quel est l'ensemble de définition $\mathscr{D}_f$ de f ?
2) On admet que f est dérivable sur $\mathscr{D}_f$.
   Calculer la dérivée f' de la fonction f.
3) Déterminer son signe, puis en déduire le sens des variations de f.
4) À l'aide d'une calculatrice, conjecturer les limites de f aux bornes de $\mathscr{D}_f$.
5) On admet que la droite $\mathscr{D}$ d'équation $y=1$ est asymptote à $\mathscr{C}_f$ à l'infini.
   (Une droite asymptote à une courbe est une droite dont une courbe s'approche de plus en plus, sans jamais l'atteindre.)
   Déterminer la position relative de $\mathscr{C}_f$ par rapport à $\mathscr{D}$.
6) Déterminer l'équation de la tangente T à $\mathscr{C}_f$ en son point d'abscisse 2.
7) Étudier la position relative de $\mathscr{C}_f$ et de T.
8) Construire, sur le même dessin, la courbe $\mathscr{C}_f$, la tangente T et la droite $\mathscr{D}$.
9) **Question facultative :**
   La courbe $\mathscr{C}$ semble-t-elle avoir un axe de symétrie ? Lequel ?
   Justifier en comparant $f\left(\dfrac{1}{2}-h\right)$ et $f\left(\dfrac{1}{2}+h\right)$ pour tout h.

V

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\dfrac{1}{3}x+5$.

1) Étudier les variations de la fonction f sur $\mathbb{R}$.
2) Résoudre l'équation $f(x)=x$.
3) On considère la suite numérique (u_n) définie par : $\begin{cases} u_0=10 \\ u_{n+1}=\dfrac{1}{3}u_n+5 \end{cases}$.
   (a) Calculer u_1.
   (b) Comparer u_0, u_1 et $\dfrac{15}{2}$.
   (c) Démontrer, par récurrence sur n, que, pour tout $n\in\mathbb{N}$, on a :
   $$\frac{15}{2}\leqslant u_{n+1}\leqslant u_n$$
   (d) Que peut-on déduire sur le sens de variation de la suite (u_n) ?
   (e) En utilisant la calculatrice, peut-on penser que la suite (u_n) converge et si oui, vers quel nombre ?