

Correction du devoir sur feuille n° 1

I

Dans chaque cas, résoudre l'équation $P(x) = 0$, en réfléchissant à la meilleure stratégie.

a) $P(x) = 8x^2 + 64x$
 $P(x) = 0 \iff 8x^2 + 64x = 0 \iff 8x(x + 8) = 0$.
 Un produit de facteurs est nul, si et seulement si, l'un des facteurs est nul.
 L'ensemble des solutions est alors : $\mathcal{S} = \{-8; 0\}$

b) $P(x) = 3x^2 - 6x + 3$
 $P(x) = 0 \iff 3x^2 - 6x + 3 = 0$
 $\iff 3(x^2 - 2x + 1) = 0 \iff 3(x - 1)^2 = 0$ (identité remarquable).
 L'ensemble des solutions est alors : $\mathcal{S} = \{1\}$

c) $P(x) = 5x^2 - 125$
 $P(x) = 0 \iff 5x^2 - 125 = 0 \iff 5(x^2 - 25) = 0$
 $\iff 5(x + 5)(x - 5) = 0$ (identité remarquable).
 L'ensemble des solutions est alors : $\mathcal{S} = \{-5; 5\}$

d) $P(x) = 3x^2 - 5x - 7$
 $P(x) = 0 \iff 3x^2 - 5x - 7 = 0$ (polynôme du second degré).
 $\Delta = (-5)^2 - 4 \times 3 \times (-7) = 25 + 84 = 109 > 0$.
 L'équation admet deux solutions :
 $x_1 = \frac{5 - \sqrt{109}}{6}$ et $x_2 = \frac{5 + \sqrt{109}}{6}$.
 $\mathcal{S} = \left\{ \frac{5 - \sqrt{109}}{6}; \frac{5 + \sqrt{109}}{6} \right\}$

II

On définit la fonction f sur $]0; +\infty[$ par :

$$f(x) = x^3 - \frac{10}{x}.$$

1. f est dérivable sur $]0; +\infty[$;

$$f = u + 10 \times v \text{ avec } \begin{cases} u(x) = x^3 \\ v(x) = \frac{1}{x} \end{cases}.$$

$$f' = u' + 10 \times v' \text{ avec } \begin{cases} u'(x) = 3x^2 \\ v'(x) = -\frac{1}{x^2} \end{cases}.$$

Alors : $f'(x) = 3x^2 + 10 \times \frac{1}{x^2} = 3x^2 + \frac{10}{x^2} > 0$ sur $]0; +\infty[$ donc f est croissante sur $]0; +\infty[$.

2. On pose $A = (\sqrt{2})^3 - \frac{10}{\sqrt{2}}$ et $B = (1,42)^3 - \frac{10}{1,42}$.

On remarque que $A = f(\sqrt{2})$ et $B = f(1,42)$.

- $0 < \sqrt{2} < 1,42$
- Sur $]0; +\infty[$, f est croissante donc f conserve l'ordre

On en déduit que $f(\sqrt{2}) < f(1,42)$ donc $A < B$

III

On considère la fonction f , définie sur $\mathbb{R}$, par :

$$f(x) = 4x^3 - x^2 - 70x$$

1. $f'(x) = 12x^2 - 2x - 70 = 2(6x^2 - x - 35)$ qui est du signe de $6x^2 - x - 35$ (polynôme du second degré)

$$\Delta = (-1)^2 - 4 \times 6 \times (-35) = 841.$$

Il y a deux racines :

$$x_1 = \frac{1 - \sqrt{841}}{2 \times 6} = \frac{1 - 29}{12} = -\frac{28}{12} = -\frac{7}{3}$$

$$x_2 = \frac{1 + \sqrt{841}}{2 \times 6} = \frac{1 + 29}{12} = \frac{30}{12} = \frac{5}{2}$$

2. Les variations de f dépendent du signe de f' .
 $f'(x)$ est un polynôme du second degré qui a deux racines; il est du signe du coefficient de x^2 (positif) à l'extérieur des racines et négatif entre ces racines.

Tableau de variation :

x	$-\infty$	$-\frac{7}{3}$	$\frac{5}{2}$	$+\infty$
$f'(x)$		+	-	+
$f(x)$	$-\infty$	$\frac{2891}{27}$	$-\frac{475}{4}$	$+\infty$

On verra le calcul des limites à l'infini dans un prochain chapitre.

IV

Le plan est muni d'un repère orthonormé.

Soit f la fonction définie par $f(x) = \frac{x^2 - x - 2}{x^2 - x + 1}$.

Soit $\mathcal{C}_f$ sa représentation graphique.

- 1) On résout $x^2 - x + 1 = 0$; $\Delta = (-1)^2 - 4 \times 1 \times 1 < 0$ donc il n'y a pas de racine.

Le dénominateur ne s'annule pas, donc l'ensemble de définition est : $\mathcal{D} = \mathbb{R}$.

- 2) On admet que f est dérivable sur $\mathcal{D}_f$.

$$f = \frac{u}{v} \text{ avec } \begin{cases} u(x) = x^2 - x - 2 \\ v(x) = x^2 - x + 1 \end{cases}$$

$$f' = \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2} \text{ avec } u'(x) = 2x - 1$$

$$v'(x) = 2x - 1.$$

Alors :

$$f'(x) = \frac{(2x-1)(x^2-x+1) - (2x-1)(x^2-x-2)}{(x^2-x+1)^2}$$

$$= \frac{(2x-1)[x^2-x+1 - (x^2-x-2)]}{(x^2-x+1)^2}$$

$$= \frac{3(2x-1)}{(x^2-x+1)^2}$$

- 3) $3 > 0$ et $(x^2 - x - 1)^2 > 0$ donc $f'(x)$ est du signe de $2x - 1$, donc négatif pour $x < \frac{1}{2}$, nul pour $x = \frac{1}{2}$ et positif pour $x > \frac{1}{2}$.

On en déduit le tableau de variation de f :

x	$-\infty$	$\frac{1}{2}$	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	1		1

-3

- 4) On observe que, pour x tendant vers $-\infty$ ou $+\infty$, $f(x)$ se rapproche de plus en plus de 1 (on verra les calculs de limites en cours bientôt)
- 5) Puisque $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 1$, la droite d'équation $y = 1$ est asymptote à $\mathcal{C}_f$ à l'infini. Pour déterminer la position relative de $\mathcal{C}_f$ par rapport à $\mathcal{D}$, on étudie le signe de $f(x) - 1$.

$$f(x) - 1 = \frac{x^2 - x - 2}{x^2 - x + 1} - 1 = \frac{x^2 - x - 2 - (x^2 - x + 1)}{x^2 - x + 1}$$

$$= \frac{-3}{x^2 - x + 1} < 0 \text{ car le dénominateur est strictement positif.}$$

$f(x) < 1$ pour tout x donc $\mathcal{C}_f$ est en dessous de l'asymptote $\mathcal{D}$.

- 6) L'équation de la tangente en a est

$$y = f'(x)(x - a) + f(a).$$

Avec $a = 2$, on obtient $y = f'(2)(x - 2) + f(2)$ avec

$$\begin{cases} f'(2) = 1 \\ f(2) = 0 \end{cases}$$

La tangente T en 2 a pour équation $y = x - 2$.

- 7) On étudie le signe de $f(x) - (x - 2)$:

$$f(x) - (x - 2) = \frac{x^2 - x - 2}{x^2 - x + 1} - (x - 2)$$

$$= \frac{x^2 - x - 2 - (x - 2)(x^2 - x + 1)}{x^2 - x + 1}$$

$$= \frac{x^2 - x - 2 - [x^3 - x^2 + x - 2x^2 + 2x - 2]}{x^2 - x + 1}$$

$$= \frac{-x^3 + 4x^2 - 4x}{x^2 - x + 1} = \frac{-x(x^2 - 4x + 4)}{x^2 - x + 1} = \frac{-x(x - 2)^2}{x^2 - x + 1}$$

$(x - 2)^2 \geq 0$, $x^2 - x + 1 > 0$ donc $f(x) - (x - 2)$ est du signe de $-x$ et s'annule en 2 (évident puis que 2 est l'abscisse du point de tangence).

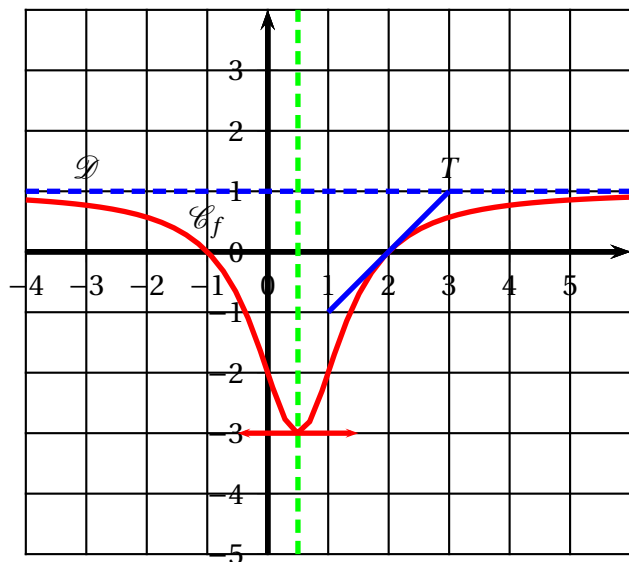
Tableau de signes :

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$
$f(x) - (x - 2)$	+	0	0	-

Conclusion :

- $\mathcal{C}_f$ est au-dessus de T pour $x < 0$
- $\mathcal{C}_f$ coupe T en 0.
- $\mathcal{C}_f$ est en dessous de T pour $x > 0$ avec T tangente à $\mathcal{C}_f$ en 2.

8) **Courbe :**



Remarque : il est conseillé de tracer les tangentes horizontales, d'une longueur faible, puisque une tangente est une propriété **locale**.

9) **Question facultative :**

La courbe $\mathcal{C}$ semble-t-elle avoir la droite d'équation $x = \frac{1}{2}$ comme axe de symétrie.

Justification :

Pour tout h :

$$\begin{aligned} \bullet f\left(\frac{1}{2} - h\right) &= \frac{\left(\frac{1}{2} - h\right)^2 - \left(\frac{1}{2} - h\right) - 2}{\left(\frac{1}{2} - h\right)^2 - \left(\frac{1}{2} - h\right) + 1} \\ &= \frac{\frac{1}{4} - h + h^2 - \frac{1}{2} + h - 2}{\frac{1}{4} - h + h^2 - \frac{1}{2} + h + 1} = \frac{h^2 - \frac{9}{4}}{h^2 + \frac{3}{4}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bullet f\left(\frac{1}{2} + h\right) &= \frac{\left(\frac{1}{2} + h\right)^2 - \left(\frac{1}{2} + h\right) - 2}{\left(\frac{1}{2} + h\right)^2 - \left(\frac{1}{2} + h\right) + 1} \\ &= \frac{\frac{1}{4} + h + h^2 - \frac{1}{2} - h - 2}{\frac{1}{4} + h + h^2 - \frac{1}{2} - h + 1} = \frac{h^2 - \frac{9}{4}}{h^2 + \frac{3}{4}} \end{aligned}$$

$$\bullet \text{ Pour tout } h, \quad f\left(\frac{1}{2} - h\right) = f\left(\frac{1}{2} + h\right).$$

$\mathcal{C}_f$ est bien symétrique par rapport à la droite d'équation $x = \frac{1}{2}$ (voir courbe)

V

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{1}{3}x + 5$.

1) f est affine, de coefficient directeur $\frac{1}{3} > 0$ donc f est **croissante**.

$$2) f(x) = x \iff \frac{1}{3}x + 5 = x \iff 5 = x - \frac{1}{3}x$$

$$\iff 5 = \frac{2}{3}x \iff \boxed{x = \frac{15}{2}}.$$

(Remarque : ce nombre est appelé **point fixe** de f).

3) On considère la suite numérique (u_n) définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 10 \\ u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + 5 \end{cases}.$$

$$(a) u_1 = \frac{1}{3} \times 10 + 5 = \frac{10}{3} + 5 = \boxed{\frac{25}{3}}$$

$$(b) u_0 = 10 = \frac{60}{2}; u_1 = \frac{25}{3} = \frac{50}{6} \text{ et } \frac{15}{2} = \frac{45}{6} \text{ donc :}$$

$$\boxed{\frac{15}{2} < u_1 < u_0}.$$

(c) Notons $P(n)$ la propriété : $\frac{15}{2} \leq u_{n+1} \leq u_n$.

Démontrons-la par récurrence :

- **Initialisation** : Pour $n = 0$, on a vu à la question précédente que $\frac{15}{2} < u_1 < u_0$ donc $P(0)$ est vraie.

- **Hérédité** : on suppose que $P(n)$ est vraie, donc $\frac{15}{2} \leq u_{n+1} \leq u_n$.

Puisque f est croissante, elle conserve l'ordre donc :

$$\frac{15}{2} \leq u_{n+1} \leq u_n$$

$$\Rightarrow f\left(\frac{15}{2}\right) < f(u_{n+1}) < f(u_n)$$

$$\Rightarrow \frac{15}{2} < u_{n+2} < u_{n+1}.$$

$P(n+1)$ est vraie.

On a montré que si $P(n)$ est vraie, alors $P(n+1)$ est vraie et ce, pour tout $n \geq 0$

- **Conclusion** : D'après l'**axiome de récurrence**, $P(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

(d) Pour tout n , $u_{n+1} \leq u_n$ donc la suite (u_n) est décroissante.

(e) À l'aide de la calculatrice, on conjecture que la suite (u_n) converge vers $7,5 = \frac{15}{2}$.

On pourra le démontrer dans un chapitre ultérieur.