Correction des exercices de bac

I Polynésie mai 2022

L'espace est rapporté un repère orthonormal où l'on considère :

- les points $A(2\,;\,-1\,;\,0)$ $B(1\,;\,0\,;\,-3)$, $C(6\,;\,6\,;\,1)$ et $E(1\,;\,2\,;\,4)$;
- Le plan $\mathcal{P}$ d'équation cartésienne $2x - y - z + 4 = 0$.

1. (a) On veut démontrer que le triangle ABC est rectangle en A ; on a $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-1\\1\\-3\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}4\\7\\1\end{pmatrix}$.

   $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = -4+7-3 = \boxed{0}$ donc $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont orthogonaux et le triangle ABC est donc rectangle en A.

   (b) $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}5\\6\\4\end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC} = 5-6+12 = \boxed{11}$.

   $BA = \sqrt{1^2+(-1)^2+3^2} = \boxed{\sqrt{11}}$ et $BC = \sqrt{5^2+6^2+4^2} = \boxed{\sqrt{77}}$

   (c) On cherche la mesure en degrés de l'angle $\widehat{ABC}$ arrondie au degré.

   On a alors

$$\begin{aligned}\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC} = BA\times BC\times\cos\left(\widehat{ABC}\right) &\iff 11 = \sqrt{11}\times\sqrt{77}\times\cos\left(\widehat{ABC}\right)\\ &\iff 11 = \sqrt{11}\times\sqrt{11}\times\sqrt{7}\times\cos\left(\widehat{ABC}\right)\\ &\iff \cos\left(\widehat{ABC}\right) = \frac{1}{\sqrt{7}}\end{aligned}$$

   La calculatrice donne $\widehat{ABC} \approx \boxed{68°}$ au degré près.

2. (a) On veut démontrer que le plan $\mathcal{P}$ est parallèle au plan (ABC).

   Un vecteur normal du plan (ABC) est le vecteur $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix}2\\-1\\-1\end{pmatrix}$.

   Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires car ABC est un triangle rectangle.
   De plus $\overrightarrow{n}\cdot\overrightarrow{AB} = 2\times(-1)-1\times1-1\times(-3) = -2-1+3 = \boxed{0}$
   et
   $\overrightarrow{n}\cdot\overrightarrow{AC} = 2\times4-1\times7-1\times1 = 8-7-1 = \boxed{0}$
   $\overrightarrow{n}$ est donc un vecteur normal à deux vecteurs non colinéaires du plan (ABC), c'est donc un vecteur **normal** à ce plan et du plan $\mathcal{P}$.
   Les plans $\mathcal{P}$ et (ABC) sont donc **parallèles**.

   (b) On en déduit une équation cartésienne du plan (ABC).
   Le plan (ABC) a donc une équation de la forme $2x - y - z + d = 0$, comme A appartient à ce plan, on a : $5 + d = 0$ soit $d = -5$.
   Une équation de (ABC) est donc $\boxed{2x - y - z - 5 = 0}$.

   (c) On détermine une représentation paramétrique de la droite $\mathcal{D}$ orthogonale au plan (ABC) et passant par le point E.
   Un vecteur directeur de la droite $\mathcal{D}$ est donc le vecteur $\overrightarrow{n}$

On a donc $M(x\,;\,y\,;\,z) \in \mathcal{D} \iff \overrightarrow{\mathrm{E}M} = t\overrightarrow{n}$, avec $t \in \mathbb{R}$, soit

$$\left\{\begin{array}{lcl} x-1 &=& 2t\\ y-2 &=& -t, \quad t\in\mathbb{R}\\ z-4 &=& -t\end{array}\right. \iff \boxed{\left\{\begin{array}{lcl} x &=& 1+2t\\ y &=& 2-t, \quad t\in\mathbb{R}\\ z &=& 4-t\end{array}\right.}.$$

(d) On démontre que le projeté orthogonal H du point E sur le plan (ABC) a pour coordonnées $\left(4\,;\,\frac{1}{2}\,;\,\frac{5}{2}\right)$.

H correspond à l'intersection du plan (ABC) avec la droite perpendiculaire à (ABC) qui passe par E soit la droite $\mathcal{D}$, les coordonnées de H seront donc solutions du système suivant :

$$\begin{cases} x=1+2t\\ y=2-t\\ z=4-t\\ 2x-y-z-5=0\end{cases} \iff \begin{cases} x=1+2t\\ y=2-t\\ z=4-t\\ 2(1+2t)-(2-t)-(4-t)-5=0\end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x=1+2t\\ y=2-t\\ z=4-t\\ 6t-9=0\end{cases} \iff \begin{cases} t=\frac{3}{2}\\ x=4\\ y=\frac{1}{2}\\ z=\frac{5}{2}\end{cases}$$

3. On rappelle que le volume d'une pyramide est donné par $\mathcal{V} = \frac{1}{3}\mathcal{B}h$ où $\mathcal{B}$ désigne l'aire d'une base et h la hauteur de la pyramide associée à cette base.

On va calculer l'aire du triangle ABC puis démontrer que le volume de la pyramide ABCE est égal à 16,5 unités de volume.

$\mathrm{AC} = \sqrt{4^2+7^2+1^2} = \sqrt{66}$ et donc $\mathcal{B} = \dfrac{\mathrm{AB}\times\mathrm{AC}}{2} = \dfrac{\sqrt{11}\times\sqrt{66}}{2} = \dfrac{11\sqrt{6}}{2}$

HE est la hauteur de la pyramide et $\overrightarrow{\mathrm{HE}}\begin{pmatrix}-3\\ \frac{3}{2}\\ \frac{3}{2}\end{pmatrix}$

On a par suite $\mathrm{HE} = \sqrt{(-3)^2+\left(\frac{3}{2}\right)^2+\left(\frac{3}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{27}{2}}$ puis

$\mathcal{V} = \dfrac{1}{3}\times\dfrac{11\sqrt{6}}{2}\times\sqrt{\dfrac{27}{2}} = \dfrac{11\times\sqrt{2}\times\sqrt{3}\times3\sqrt{3}}{3\times2\times\sqrt{2}} = \boxed{\dfrac{33}{2} = 16,5}$

II Métropole juin 2022

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé $\left(O\,;\,\vec{i}\,;\,\vec{j}\,;\,\vec{k}\right)$, on considère :

- le point A de coordonnées $(-1\,;\,1\,;\,3)$,
- la droite $\mathscr{D}$ dont une représentation paramétrique est : $\left\{\begin{array}{rcl} x &=& 1+2t \\ y &=& 2-t, \quad t \in \mathbb{R}. \\ z &=& 2+2t \end{array}\right.$

On admet que le point A n'appartient pas à la droite $\mathscr{D}$.

1. (a) $\boxed{\vec{u}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}}$ est une vecteur directeur de $\mathscr{D}$.

   (b) Pour $\boxed{t=-1}$, on obtient les cordonnées de B, donc B appartient à la droite $\mathscr{D}$.

   (c) $\vec{\text{AB}}\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ donc $\vec{\text{AB}}\cdot\vec{u} = 2\times 0 - 1\times 2 + 2\times(-3) = -8$; $\boxed{\vec{AB}\cdot\vec{u}=-8}$

2. On note $\mathscr{P}$ le plan passant par le point A et orthogonal à la droite $\mathscr{D}$, et on appelle H le point d'intersection du plan $\mathscr{P}$ et de la droite $\mathscr{D}$. Ainsi, H est le projeté orthogonal de A sur la droite $\mathscr{D}$.

   (a) $\vec{u}$ est un vecteur normal au plan $\mathscr{P}$.
   A appartient à ce plan ; une équation cartésienne de $\mathscr{P}$ est donc :

   $$2\,(x-x_{\text{A}}) - \left(y-y_{\text{A}}\right) + 2\,(z-z_{\text{A}}) = 0 \Leftrightarrow 2\,(x+1) - \left(y-1\right) + 2\,(z-3) = 0 \Leftrightarrow \boxed{2x-y+2z-3=0}$$

   (b) $\text{H} = \mathscr{D}\cap\mathscr{P}$ donc les coordonnées de P vérifient la représentation paramétrique de $\mathscr{D}$ et l'équation cartésienne de $\mathscr{P}$.
   On résout :
   $$\begin{cases} x = 1+2t \\ y = 2-t \\ z = 2+2t \\ 2x-y+2z-3=0 \end{cases}.$$
   On en déduit : $2(1+2t)-(2-t)+2(2+2t)-3=0 \Leftrightarrow 9t+1=0 \Leftrightarrow \boxed{t=-\dfrac{1}{9}}$.

   On en déduit :
   $$\begin{cases} x = 1-\dfrac{2}{9} = \dfrac{7}{9} \\ y = 2+\dfrac{1}{9} = \dfrac{19}{9} \\ z = 2-\dfrac{2}{9} = \dfrac{16}{9} \end{cases}, \text{ d'où } \boxed{\text{H}\left(\dfrac{7}{9}\,;\,\dfrac{19}{9}\,;\,\dfrac{16}{9}\right)}.$$

   (c) Alors : $\vec{\text{AH}}\begin{pmatrix} \dfrac{16}{9} \\ \dfrac{10}{9} \\ -\dfrac{11}{9} \end{pmatrix} = \boxed{\dfrac{1}{9}\begin{pmatrix} 16 \\ 10 \\ -11 \end{pmatrix}}$.

   On en déduit : $\text{AH} = \dfrac{1}{9}\sqrt{16^2+10^2+(-11)^2} = \dfrac{1}{9}\sqrt{477} = \dfrac{1}{9}\sqrt{9\times 53} = \dfrac{3\sqrt{53}}{9} = \dfrac{\sqrt{53}}{3}$ $\boxed{AH = \dfrac{\sqrt{53}}{3}}$.

3. Dans cette question, on se propose de retrouver les coordonnées du point H, projeté orthogonal du point A sur la droite $\mathscr{D}$, par une autre méthode.

   On rappelle que le point B$(-1\,;\,3\,;\,0)$ appartient à la droite $\mathscr{D}$ et que le vecteur $\vec{u}$ est un vecteur directeur de la droite $\mathscr{D}$.

   (a) $\vec{HB}$ est colinéaire à $\vec{u}$ donc il existe $k \in \mathbb{R}$ tel que $\boxed{\vec{HB} = k\vec{u}}$.

   (b) $\vec{AB} = \vec{AH} + \vec{HB}$.
   Alors : $AB \cdot \vec{u} = \left(\vec{AH} + \vec{HB}\right) \cdot \vec{u} = \vec{AH} \cdot \vec{u} + \vec{HB} \cdot \vec{u} = \vec{HB} \cdot \vec{u} = k\vec{u} \cdot \vec{u} = k\,||\vec{u}||^2$.
   $\vec{AH} \cdot \vec{u} = \vec{0}$ car $\vec{AH} \perp \vec{u}$.

   On en déduit : $\boxed{k = \dfrac{\vec{AB} \cdot \vec{u}}{||\vec{u}||^2}}$.

   (c) $||\vec{u}||^2 = 9$ donc $\boxed{k = -\dfrac{8}{9}}$.

   On sait que $\vec{HB} = k\vec{u}$.

   On en déduit : $\begin{cases} -1 - x_H = -\dfrac{8}{9} \times 2 \\ 3 - y_H = -\dfrac{8}{9} \times (-2) \\ -z_H = -\dfrac{8}{9} \times 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_H = \dfrac{7}{9} \\ y_H = \dfrac{19}{9} \\ z_H = \dfrac{16}{9} \end{cases}$ donc $\boxed{H\left(\dfrac{7}{9}\,;\,\dfrac{19}{9}\,;\,\dfrac{16}{9}\right)}$.

4. $V = \dfrac{8}{9} = \dfrac{\mathscr{A}(ACH) \times BH}{3}$.

   $BH = |k|\,||\vec{u}|| = \dfrac{8}{9} \times 3 = \dfrac{8}{3}$.

   Alors : $\dfrac{8}{9} = \mathscr{A}(ACH) \times \dfrac{8}{9}$ d'où $\boxed{\mathscr{A}(ACH) = 1}$.