

## Exercices de baccalauréat sur les suites

### I Bac S Antilles-Guyane juin 2018

Le directeur d'une réserve marine a recensé 3 000 cétacés dans cette réserve au 1<sup>er</sup> juin 2017. Il est inquiet car il sait que le classement de la zone en « réserve marine » ne sera pas reconduit si le nombre de cétacés de cette réserve devient inférieur à 2 000.

Une étude lui permet d'élaborer un modèle selon lequel, chaque année :

- entre le 1<sup>er</sup> juin et le 31 octobre, 80 cétacés arrivent dans la réserve marine ;
- entre le 1<sup>er</sup> novembre et le 31 mai, la réserve subit une baisse de 5 % de son effectif par rapport à celui du 31 octobre qui précède.

On modélise l'évolution du nombre de cétacés par une suite  $(u_n)$ . Selon ce modèle, pour tout entier naturel  $n$ ,  $u_n$  désigne le nombre de cétacés au 1<sup>er</sup> juin de l'année 2017 +  $n$ . On a donc  $u_0 = 3000$ .

1. Justifier que  $u_1 = 2926$ .
2. Justifier que, pour tout entier naturel  $n$ ,  $u_{n+1} = 0,95u_n + 76$ .
3. À l'aide d'un tableur, on a calculé les 8 premiers termes de la suite  $(u_n)$ . Le directeur a configuré le format des cellules pour que ne soient affichés que des nombres arrondis à l'unité.

|   | A     | B    | C    | D    | E    | F    | G    | H    | I    |
|---|-------|------|------|------|------|------|------|------|------|
| 1 | $n$   | 0    | 1    | 2    | 3    | 4    | 5    | 6    | 7    |
| 2 | $u_n$ | 3000 | 2926 | 2856 | 2789 | 2725 | 2665 | 2608 | 2553 |

Quelle formule peut-on entrer dans la cellule C2 afin d'obtenir, par recopie vers la droite, les termes de la suite  $(u_n)$  ?

4. (a) Démontrer que, pour tout entier naturel  $n$ ,  $u_n \geq 1520$ .
- (b) Démontrer que la suite  $(u_n)$  est décroissante.
- (c) Justifier que la suite  $(u_n)$  est convergente. On ne cherchera pas ici la valeur de la limite.
5. On désigne par  $(v_n)$  la suite définie par, pour tout entier naturel  $n$ ,  $v_n = u_n - 1520$ .
  - (a) Démontrer que la suite  $(v_n)$  est une suite géométrique de raison 0,95 dont on précisera le premier terme.
  - (b) En déduire que, pour tout entier naturel  $n$ ,  $u_n = 1480 \times 0,95^n + 1520$ .
  - (c) Déterminer la limite de la suite  $(u_n)$ .
6. Recopier et compléter l'algorithme suivant pour déterminer l'année à partir de laquelle le nombre de cétacés présents dans la réserve marine sera inférieur à 2 000.

|                      |
|----------------------|
| $n \leftarrow 0$     |
| $u \leftarrow 3000$  |
| Tant que ...         |
| $n \leftarrow \dots$ |
| $u \leftarrow \dots$ |
| Fin de Tant que      |

La notation «  $\leftarrow$  » correspond à une affectation de valeur, ainsi «  $n \leftarrow 0$  » signifie « Affecter à  $n$  la valeur 0 ».

7. La réserve marine fermera-t-elle un jour ? Si oui, déterminer l'année de la fermeture.

### II Bac S : Nouvelle Calédonie mars 2019

On considère la suite  $(u_n)$  à valeurs réelles définie par  $u_0 = 1$  et, pour tout entier naturel  $n$ ,

$$u_{n+1} = \frac{u_n}{u_n + 8}.$$

#### Partie A : Conjectures

Les premières valeurs de la suite  $(u_n)$  ont été calculées à l'aide d'un tableur dont voici une capture d'écran :

|    | A   | B            |
|----|-----|--------------|
| 1  | $n$ | $u_n$        |
| 2  | 0   | 1            |
| 3  | 1   | 0,111 111 11 |
| 4  | 2   | 0,013 698 63 |
| 5  | 3   | 0,001 709 4  |
| 6  | 4   | 0,000 213 63 |
| 7  | 5   | 2,670 3E-05  |
| 8  | 6   | 3,337 9E-06  |
| 9  | 7   | 4,172 3E-07  |
| 10 | 8   | 5,215 4E-08  |
| 11 | 9   | 6,519 3E-09  |
| 12 | 10  | 8,149 1E-10  |

1. Quelle formule peut-on entrer dans la cellule B3 et copier vers le bas pour obtenir les valeurs des premiers termes de la suite  $(u_n)$  ?
2. Quelle conjecture peut-on faire sur les variations de la suite  $(u_n)$  ?
3. Quelle conjecture peut-on faire sur la limite de la suite  $(u_n)$  ?
4. Écrire un algorithme calculant  $u_{30}$ .

#### Partie B : Étude générale

1. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel  $n$ ,  $u_n > 0$ .
2. Étudier les variations de la suite  $(u_n)$ .
3. La suite  $(u_n)$  est-elle convergente ? Justifier.

#### Partie C : Recherche d'une expression du terme général

On définit la suite  $(v_n)$  en posant, pour tout entier naturel  $n$ ,

$$v_n = 1 + \frac{7}{u_n}.$$

1. Démontrer que la suite  $(v_n)$  est une suite géométrique de raison 8 dont on déterminera le premier terme.
2. Justifier que, pour tout entier naturel  $n$ ,

$$u_n = \frac{7}{8^{n+1} - 1}.$$

3. Déterminer la limite de la suite  $(u_n)$
4. On cherche dans cette question le plus petit entier naturel  $n_0$  tel que, pour tout entier naturel  $n$  supérieur ou égal à  $n_0$ ,  $u_n < 10^{-18}$ . Justifier l'existence d'un tel entier  $n_0$  et déterminer sa valeur.