# Exercices de baccalauréat (géométrie dans l'espace)

## I Polynésie mai 2022

L'espace est rapporté un repère orthonormal où l'on considère :

- les points A(2 ; −1 ; 0) B(1 ; 0 ; −3), C(6 ; 6 ; 1) et E(1 ; 2 ; 4) ;
- Le plan $\mathscr{P}$ d'équation cartésienne $2x - y - z + 4 = 0$.

1. (a) Démontrer que le triangle ABC est rectangle en A.

   (b) Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}$ puis les longueurs BA et BC.

   (c) En déduire la mesure en degrés de l'angle $\widehat{ABC}$ arrondie au degré.

2. (a) Démontrer que le plan $\mathscr{P}$ est parallèle au plan (ABC).

   (b) En déduire une équation cartésienne du plan (ABC).

   (c) Déterminer une représentation paramétrique de la droite $\mathscr{D}$ orthogonale au plan ABC et passant par le point E.

   (d) Démontrer que le projeté orthogonal H du point E sur le plan (ABC) a pour coordonnées $\left(4 ; \frac{1}{2} ; \frac{5}{2}\right)$.

3. On rappelle que le volume d'une pyramide est donné par $\mathscr{V} = \frac{1}{3}\mathscr{B}h$ où $\mathscr{B}$ désigne l'aire d'une base et $h$ la hauteur de la pyramide associée à cette base.

   Calculer l'aire du triangle ABC puis démontrer que le volume de la pyramide ABCE est égal à 16,5 unités de volume.

## II Métropole juin 2022

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé $\left(O ; \vec{i} ; \vec{j} ; \vec{k}\right)$, on considère :

- le point A de coordonnées (−1 ; 1 ; 3),
- la droite $\mathscr{D}$ dont une représentation paramétrique est :

$$\left\{\begin{array}{rcl} x &=& 1+2t \\ y &=& 2-t, \quad t \in \mathbb{R}. \\ z &=& 2+2t \end{array}\right.$$

On admet que le point A n'appartient pas à la droite $\mathscr{D}$.

1. (a) Donner les coordonnées d'un vecteur directeur $\vec{u}$ de la droite $\mathscr{D}$.

   (b) Montrer que le point B(−1 ; 3 ; 0) appartient à la droite $\mathscr{D}$.

   (c) Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{AB} \cdot \vec{u}$.

2. On note $\mathscr{P}$ le plan passant par le point A et orthogonal à la droite $\mathscr{D}$, et on appelle H le point d'intersection du plan $\mathscr{P}$ et de la droite $\mathscr{D}$. Ainsi, H est le projeté orthogonal de A sur la droite $\mathscr{D}$.

   (a) Montrer que le plan $\mathscr{P}$ admet pour équation cartésienne : $2x - y + 2z - 3 = 0$.

   (b) En déduire que le point H a pour coordonnées $\left(\frac{7}{9} ; \frac{19}{9} ; \frac{16}{9}\right)$.

   (c) Calculer la longueur AH. On donnera une valeur exacte.

3. Dans cette question, on se propose de retrouver les coordonnées du point H, projeté orthogonal du point A sur la droite $\mathscr{D}$, par une autre méthode.

   On rappelle que le point B(−1 ; 3 ; 0) appartient à la droite $\mathscr{D}$ et que le vecteur $\vec{u}$ est un vecteur directeur de la droite $\mathscr{D}$.

   (a) Justifier qu'il existe un nombre réel $k$ tel que $\overrightarrow{HB} = k\vec{u}$.

   (b) Montrer que $k = \dfrac{\overrightarrow{AB} \cdot \vec{u}}{\|\vec{u}\|^2}$.

   (c) Calculer la valeur du nombre réel $k$ et retrouver les coordonnées du point H.

4. On considère un point C appartenant au plan $\mathscr{P}$ tel que le volume du tétraèdre ABCH soit égal à $\frac{8}{9}$.

   Calculer l'aire du triangle ACH.

   On rappelle que le volume d'un tétraèdre est donné par : $V = \frac{1}{3} \times \mathscr{B} \times h$ où $\mathscr{B}$ désigne l'aire d'une base et $h$ la hauteur relative à cette base.