Centres étrangers juin 2022

L'espace est muni d'un repère orthonormé $\left(O~;~\vec{i}~;~\vec{j}~;~\vec{k}\right)$.
On considère les points $A(5~;~0~;~-1)$, $B(1~;~4~;~-1)$, $C(1~;0~;3)$, $D(5~;4~;3)$ et $E(10~;9~;8)$.

1. (a) Soit R le milieu du segment [AB].
   Calculer les coordonnées du point R ainsi que les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$.

   (b) Soit $\mathscr{P}_1$ le plan passant par le point R et dont $\overrightarrow{AB}$ est un vecteur normal. Démontrer qu'une équation cartésienne du plan $\mathscr{P}_1$ est :

   $$x - y - 1 = 0.$$

   (c) Démontrer que le point E appartient au plan $\mathscr{P}_1$ et que EA = EB .

2. On considère le plan $\mathscr{P}_2$ d'équation cartésienne $x - z - 2 = 0$.

   (a) Justifier que les plans $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$ sont sécants.

   (b) On note Δ la droite d'intersection de $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$.
   Démontrer qu'une représentation paramétrique de la droite Δ est :

   $$\left\{\begin{array}{l c r}x & = & 2 + t\\ y & = & 1 + t\\ z & = & t\end{array}\right. \quad (t \in \mathbb{R}).$$

3. On considère le plan $\mathscr{P}_3$ d'équation cartésienne $y + z - 3 = 0$.
   Justifier que la droite Δ est sécante au plan $\mathscr{P}_3$ en un point Ω dont on déterminera les coordonnées.

   Si S et T sont deux points distincts de l'espace, on rappelle que l'ensemble des points M de l'espace tels que MS = MT est un plan, appelé plan médiateur du segment [ST]. On admet que les plans $\mathscr{P}_1$, $\mathscr{P}_2$ et $\mathscr{P}_3$ sont les plans médiateurs respectifs des segments [AB], [AC] et [AD].

4. (a) Justifier que $\Omega A = \Omega B = \Omega C = \Omega D$.

   (b) En déduire que les points A, B, C et D appartiennent à une même sphère dont on précisera le centre et le rayon.