Démonstration par récurrence

Table des matières

Exemples introductif :

- Imaginons que des ouvriers construisant un immeuble, aient toutes les instructions nécessaires pour construire un étage d'immeuble sur le même modèle que l'étage qui est au-dessous.
  Ainsi peuvent-ils construire le deuxième (identique au premier), le troisième (identique au deuxième), le quatrième (identique au troisième) et ainsi de suite; on peut imaginer qu'ils peuvent alors construire un immeuble aussi haut que l'on veut (en négligeant les contraintes de résistance des matériaux qui limitent les hauteurs d'immeubles).

  Pour pouvoir faire cela, il faut **d'abord avoir construit indépendamment** le premier étage, car on ne peut pas prendre pour modèle un étage précédent, puisqu'il n'y en a pas!

- Pour faire tomber des dominos en cascade, il faut d'abord faire tomber le premier domino et ensuite, la chute d'un domino entraine la chute du suivant.

Principe d'une démonstration par récurrence :

I Description de l'ensemble des entiers naturels $\mathbb{N}$

Ce principe est basé sur la description de l'ensemble $\mathbb{N}$ des entiers naturels, décrite par le mathématicien Peano (1857 - 1932) :

• Il existe un plus petit entier, 0.
• Chaque entier autre que 0 s'obtient en ajoutant 1 à son prédécesseur.

Pour les élèves intéressés, cliquer ici sur axiomes de Peano

II Axiome de récurrence

Remarque : Un axiome (du grec ancien axioma, « considéré comme digne, convenable, évident en soi » désigne une proposition indémontrable utilisée comme fondement d'un raisonnement.
On peut en savoir davantage ici.

Axiome de récurrence :

Si une propriété est vraie pour l'entier naturel n_0 et s'il est prouvé que, lorsqu'elle est vraie pour un entier p quelconque supérieur ou égal à n_0, alors elle est vraie pour $p+1$, alors elle est vraie pour tout entier $n \geqslant n_0$.

Exemple rédigé de la démonstration d'une propriété :

Soit $\mathscr{H}_n$ une proposition qui dépend d'un entier n naturel. On veut montrer que cette proposition $\mathscr{H}_n$ est vraie pour tout $n \geq n_0$.

On suit la méthode suivante :

• On vérifie que $\mathscr{H}_{n_0}$ est vraie. (amorçage de la récurrence ou initialisation).

• On démontre que la propriété est héréditaire, c'est-à-dire que si l'on suppose que $\mathscr{H}_n$ est vraie à un rang $n \geq n_0$ (hypothèse de récurrence), alors $\mathscr{H}_{n+1}$ est vraie .
Alors, on en déduit que $\mathscr{H}_n$ est vraie pour tout $n \geq n_0$.

III Exemples de rédaction

Exemple 1

Soit la suite (u_n) définie par : $u_0 = 3$ et $u_{n+1} = 5u_n - 4$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
Les premiers termes sont$u_0 = 3$; $u_1 = 11$; $u_2 = 51$; $u_3 = 251$; $u_4 = 1\,251$.
On peut conjecturer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\boxed{u_n = 2 \times 5^n + 1}$.
Ce n'est pas parce qu'on le constate sur les premiers termes que l'on eut être sûr que la propriété est vraie pour tous les entiers naturels n.

Démontrons-le par récurrence.

Rédaction

Notons P_n l'affirmation : $\boxed{u_n = 2 \times 5^n + 1}$.

Effectuons une démonstration par récurrence :

- **Initialisation** : $n = 0 : 2 \times 5^0 + 1 = 2 \times 1 + 1 = 3 = u_0$: P_0 est vraie.
- **Hérédité** : On suppose que P_n est vraie pour un entier n quelconque, donc que $u_n = 2 \times 5^n + 1$. (**hypothèse de récurrence**).
  Il faut alors montrer que P_{n+1} est vraie (c'est à dire $u_{n+1} = 2 \times 5^{n+1} + 1$).

  On a : $u_{n+1} = 5u_n - 4 = 5\underbrace{\left(2 \times 5^n + 1\right)}_{\text{d'après } P_n} - 4 = 2 \times 5^{n+1} + 5 - 4 = 2 \times 5^{n+1} + 1$. donc P_{n+1} est vraie.

Conclusion : D'après l'axiome de récurrence, la propriété $\mathscr{H}_n$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exemple 2

Soit la suite (u_n) définie par $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = 1 + \dfrac{1}{1+u_n} \end{cases}$.

On veut montrer que, pour tout n, $1 \leqslant u_n \leqslant 2$.

On effectue une démonstration par récurrence.

Notons $\mathscr{P}_n$ la propriété : $1 \leqslant u_n \leqslant 2$.

- **Initialisation** : pour $n = 0$: $u_0 = 2$ donc $1 \leqslant u_0 \leqslant 2$: P_0 est vraie.
- **Hérédité** : on suppose $\mathscr{P}_n$ vraie pour un entier n quelconque.
  Par conséquent : $1 \leqslant u_n \leqslant 2$ (**hypothèse de récurrence**).
  Alors :
  $1 \leqslant u_n \leqslant 2$
  $\Rightarrow 2 \leqslant 1 + u_n \leqslant 3$ (en ajoutant 1)
  $\Rightarrow \dfrac{1}{3} \leqslant \dfrac{1}{1+u_n} \leqslant \dfrac{1}{2}$ (en appliquant la fonction inverse, décroissante sur les nombres positifs)
  $\Rightarrow 1 + \dfrac{1}{3} \leqslant 1 + \dfrac{1}{1+u_n} \leqslant 1 + \dfrac{1}{2}$ (en ajoutant 1)
  $\Rightarrow \dfrac{4}{3} \leqslant u_{n+1} \leqslant \dfrac{3}{2}$
  $\Rightarrow \boxed{1 \leqslant \dfrac{4}{3} \leqslant u_{n+1} \leqslant \dfrac{3}{2} \leqslant 2}$ c.q.f.d.

Conclusion : D'après l'axiome de récurrence, la propriété $\mathscr{H}_n$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exemple 3

Montrons que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $7^n - 1$ est pair.

- Il faut d'abord traduire l'affirmation sous une forme mathématique sur laquelle on peut travailler.
- L'affirmation s'écrit : Pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un entier relatif k_n tel que $7^n - 1 = 2k_n$ (l'entier dépend de n, donc on ne peut pas utiliser la même lettre pour désigner tous les entiers en question).
- On effectue une démonstration par récurrence avec comme hypothèse de récurrence : « il existe $k_n \in \mathbb{Z}$ tel que $7^n - 1 = 2k_n$ ».
- **Initialisation** : Pour $n = 0$, on a $7^0 - 1 = 1 - 1 = 0 = 2 \times 0$ donc on obtient bien un nombre pair sous la forme $2 \times k_0$ avec $k_0 = 0$.
- **Hérédité** : on suppose la propriété vraie pour un entier n quelconque, donc $7^n - 1 = 2k_n$, $k_n \in \mathbb{Z}$.
  Au rang $n+1$: $7^{n+1} - 1 = 7 \times 7^n - 1 = 7 \times (2k_n + 1) - 1 = 7 \times 2 \times_n +7 - 1 = 7 \times 2 \times_n +6 = 2\,(7k_n + 3)$ qu'on peut écrire $2k_{n+1}$ en posant $k_{n+1} = 7k_n + 3$.
  D'après l'axiome de récurrence, la propriété est vraie pour tout n.

IV Utilité des deux étapes

Montrons sur deux exemples que si l'on supprime une étape, la démonstration ne donne rien.

Exemple 1 : (on a l'amorçage, mais pas l'hérédité) :
On appelle nombre de Fermat le nombre $\boxed{F_n = 2^{2^n} + 1}$, ($n \in \mathbb{N}$).
Fermat (mathématicien français, 1601 - 1665) a affirmé (en se basant sur les premiers nombres de ce type) que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, F_n est premier.
Effectivement : $F_0 = 3$ est premier ; $F_1 = 5$ est premier ; $F_2 = 17$ est premier ; $F_3 = 257$ est premier et $F_4 = 65\,537$ est premier.
Comme on ne peut pas montrer que la propriété est héréditaire, on ne peut pas effectuer de démonstration par récurrence et donc pas en déduire que la propriété est vraie pour tout n.

D'ailleurs $F_5 = 4\,294\,967\,297 = 641 \times 6\,700\,417$ n'est pas premier, ce que Fermat n'avait pas trouvé (mais trouvé par Euler, calculateur prodige).
En fait, les nombres de Fermat pour $5 \leqslant n \leqslant 32$ ne sont pas premiers. On ne sait toujours pas si F_{33} est premier ou non.
Remarque : il est extrêmement difficile de montrer qu'un nombre n'est pas premier, même avec l'aide d'ordinateurs puissants (d'où l'utilisation des nombres premiers pour établir des codes secrets, (voir cours de maths expertes)) !

On a bien l'initialisation, mais pas l'hérédité.

Pour plus de renseignements sur les nombres de Fermat, cliquer ici ou ici

Exemple 2 :
Soit P_n la propriété : « 6 divise $7^n + 1$ »
Cette propriété est **héréditaire** à partir de $n = 0$.
En effet : Supposons P_n vraie donc il existe k_n tel que $7^n + 1 = 6k_n$, $k_n \in \mathbb{Z}$.
Alors $7^{n+1} = 7 \times 7^n + 1 = 7(6k_n - 1) + 1 = 42k_n - 6 = 6(7k_n - 1) = 6k_{n+1}$ avec $k_{n+1} = 7k_n - 1 \in \mathbb{Z}$ donc P_{n+1} est vraie aussi.
P_{n+1} est donc toujours vraie lorsque P_n l'est. P_n est une propriété **héréditaire**.

On ne peut cependant pas conclure en invoquant l'axiome de récurrence, car nous n'avons pas montré l'initialisation !
Or $\mathbf{P_0}$ est faux !.
On ne sait donc pas si la propriété est vraie pour d'autres valeurs entières de n autres que 0.

En fait, la propriété est fausse pour toutes les valeurs entières de n ! (facile à montrer en spécialité avec les congruences).

Conclusion
Les deux étapes de la démonstration par récurrence sont bien indispensables !