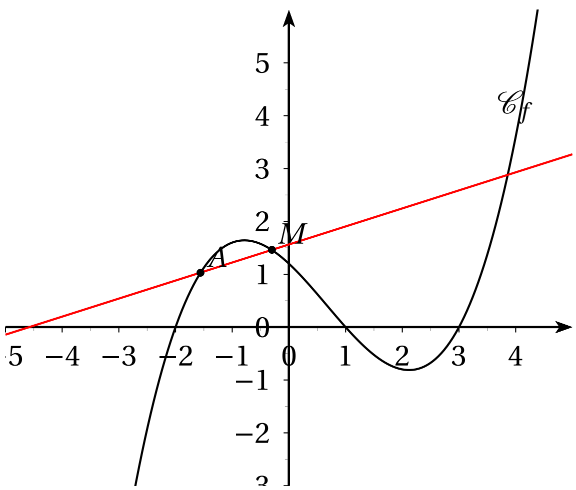
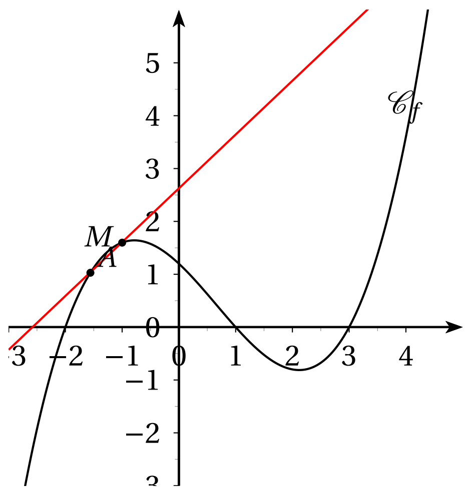
Fonctions numériques : dérivation

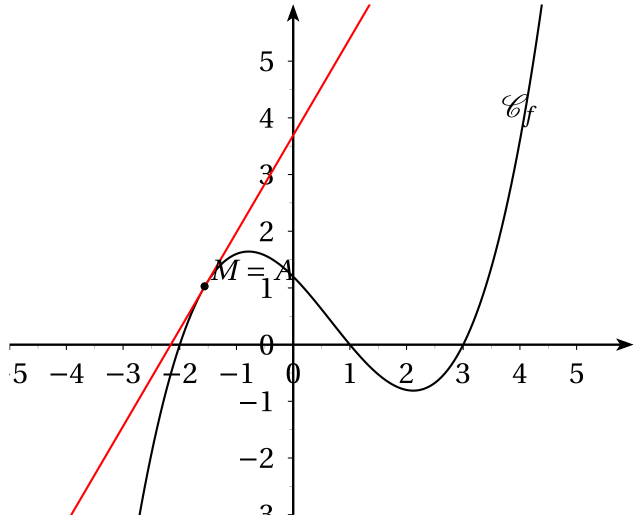
Table des matières

I Notion de tangente à une courbe

Soit f une fonction définie sur un intervalle I de courbe représentative $\mathscr{C}_f$ et soit A un point fixe de $\mathscr{C}_f$. Soit M un point variable de $\mathscr{C}_f$. On trace la droite (AM) qui est sécante à $\mathscr{C}_f$. On fait tendre M vers A. Si, lorsque M tend vers A, la sécante admet une position limite, on dit que cette limite est tangente à $\mathscr{C}_f$.







II Nombre dérivé de f en a et fonction dérivée :

Définition

Notons a l'abscisse de A et x l'abscisse de M. Le coefficient directeur de la sécante (AM) est : $\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$.

Dire que la sécante a une position limite qui est la droite tangente à $\mathscr{C}_f$ en A signifie que $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ existe et est un nombre fini.

Si ce nombre **existe** et s'il est **fini**, on pose : $\mathbf{f'(a)=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}}$ et ce nombre est le **nombre dérivé** de f en a.

On dit alors que f est dérivable en a.

Remarque :

En posant $x=a+h$, on obtient : $\mathbf{f'(a)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}}$.

Exemple : $f(x)=x^2$.

Montrons que f est dérivable en 3.

Pour tout h, $\dfrac{f(3+h)-f(3)}{h}=\dfrac{[3+h]^2-3^2}{h}=\dfrac{3^2+2\times3\times h+h^2-3^2}{h}=\dfrac{6h+h^2}{h}=6+h$.

Par conséquent : $\lim\limits_{h\to 0}\left(\dfrac{f(3+h)-f(3)}{h}\right)=6$.

f est dérivable en a et $\boxed{f'(3)=6}$

Cas général : Pour tout $a\in\mathbb{R}$: $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}=\dfrac{[a+h]^2-a^2}{h}=\dfrac{a^2+2ah+h^2-a^2}{h}=\dfrac{2ah+h^2}{h}=2a+h$.

Par conséquent : $\lim\limits_{h\to 0}\left(\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}\right)=2a$.

f est dérivable en a et $\boxed{f'(a)=2a}$

Par définition, $f'(a)$ est **le coefficient directeur de la tangente** à $\mathscr{C}_f$ en a.

Propriété

L'équation de la tangente est alors : $\mathbf{y = f'(a)(x-a)+f(a)}$.

Démonstration :

Rappel : la droite, de coefficient directeur a et passant par le point M_0 de coordonnées $\left(x_0\ ;\ y_0\right)$ a pour équation $y-y_0=a(x-x_0)$.
En effet, l'équation est de la forme $y=ax+b$.
Comme M_0 appartient à cette droite, ses coordonnées vérifient cette équation, donc $y_0=ax_0+b$.
Par conséquent : $\begin{cases} y &= ax+b \\ y_0 &= ax_0+b \end{cases}$.
Par soustraction, on obtient : $y-y_0=a(x-x_0)$.

Pour la tangente, on obtient donc : $y-y_A=f'(a)(x-x_A)$ qui donne $y=f'(a)(x-x_A)+f(a)$.

Définition

f est dérivable sur un intervalle ouvert I si f est dérivable en tout a de I.

Remarque

La dérivée f' de f est elle-même une fonction. Si elle est dérivable, on appelle f'' sa dérivée (dérivée seconde de f).
Cette dérivée seconde peut elle-même être dérivable et ainsi de suite. Les dérivées d'ordre n, avec $n \geqslant 3$, se notent $f^{(n)}$.
Ainsi : $f''=\left(f'\right)'$; $f^{(3)}=\left(f''\right)'$ et plus généralement $f^{(n+1)}=\left(f^{(n)}\right)'$

Exemples :

1. Soit $f(x)=3x^4+5x^2+2x+1$.
   On a : $f'(x)=12x^3+10x+2$; $f''(x)=36x^2+10$; $f^{(3)}(x)=72x$: $f^{(4)}(x)=72$; $f^{(5)}(x)=0$ et les dérivées suivantes sont toutes égales à la fonction nulle.
2. Imaginons qu'il existe une fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que, $f'(x)=f(x)$. f est-elle dérivable à l'ordre 3 si oui, que vaut $f^{(3)}$?
   Réponse : $f'=f$ donc f' est dérivable et $f''=(f')'=f'$ et de même $f^{(3)}=f$.
   On pourrait alors montrer par récurrence, que la fonction f vérifie alors : pour tout n, $f^{(n)}=f$.
   On étudiera cette fonction plus en détail dans un prochain chapitre.

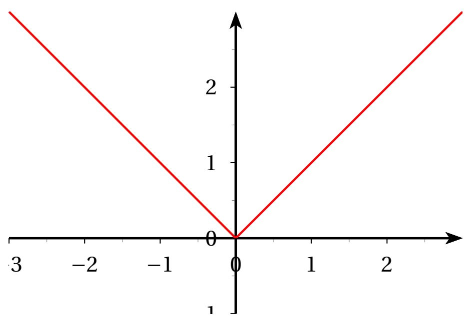
Exercices

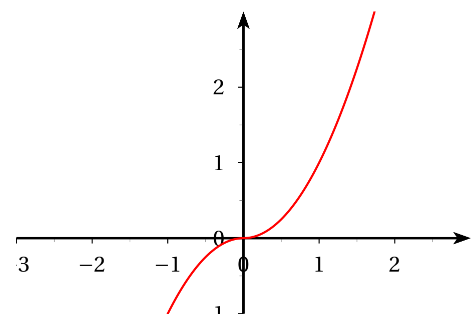
- Montrer que la fonction $x \mapsto |x|$ n'est pas dérivable en 0.
- Étudier la dérivabilité de la fonction $x \mapsto x|x|$ en 0.

Solutions :

- Soit f la fonction $x \mapsto |x|$.
  $\forall x \neq 0,\ \dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = \dfrac{|x|-0}{x-0} = \dfrac{|x|}{x}$.
  Si $x<0$, $\dfrac{|x|}{x} = \dfrac{-x}{x} = -1$ et pour $x>0$, $\dfrac{|x|}{x} = \dfrac{x}{x} = 1$.
  On en déduit que : $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} \dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} (-1) = -1$, alors que $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} (1) = 1$.
  La limite à gauche et à droite n'est pas la même, donc la limite en 0 n'existe pas; f n'est pas dérivable en 0 (mais l'est à gauche et à droite) ; on dit que la courbe admet une demi-tangente à gauche et une demi-tangente à droite.
- Soit $g : x \mapsto x|x|$. Cette fois, on a : $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{g(x)-g(0)}{x-0} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x|x|}{x} = \lim\limits_{x\to 0} (|x|) = 0$; la limite existe, donc la fonction g est dérivable en 0 et la courbe représentative de g a une tangente en 0.

Voici les deux représentations graphiques de f et de g.





III Tableau des dérivées usuelles :

Fonction f définie par :	Fonction f' définie par :	Domaine de décidabilité de validité
$f(x) = k \in \mathbb{R}$	$f'(x) = 0$	$\mathbb{R}$
$f(x) = x^n (n \in \mathbb{N}^*)$	$f'(x) = nx^{n-1}$	$\mathbb{R}$
$f(x) = \dfrac{1}{x}$	$f'(x) = -\dfrac{1}{x^2}$	$\mathbb{R}^*$
$f(x) = \dfrac{1}{x^n} = x^{-n}\ (n \in \mathbb{N},\ n \geqslant 2)$	$f'(x) = -\dfrac{n}{x^{n+1}} = -nx^{-n-1}$	$\mathbb{R}^*$
$f(x) = \sqrt{x}$	$f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$	$]0\,;\,+\infty[$
$f(x) = \cos x$	$f'(x) = -\sin x$	$\mathbb{R}$
$f(x) = \sin x$	$f'(x) = \cos x$	$\mathbb{R}$

IV Dérivées et opérations :

Soient u, v deux fonctions dérivables sur un intervalle I et k un réel.

- $(ku)' = ku'$
- $(u+v)' = u' + v'$
- $(uv)' = u'v + uv'$
- $\left(\dfrac{1}{u}\right)' = -\dfrac{u'}{u^2}$, $u(x) \neq 0$
- $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$, $v(x) \neq 0$

Exemples :

1. $f(x) = 3x^5$; $f = ku$ avec $k = 3$ et $u(x) = x^5$.
   $f' = ku'$ avec $u'(x) = 5x^4$ donc $f'(x) = 3 \times 5x^4 = \boxed{15x^4}$.
2. $f(x) = x + \dfrac{1}{x}$ sur $\mathbb{R}^*$.
   $f = u + v$ avec $\begin{cases} u(x) = x \\ v(x) = \dfrac{1}{x} \end{cases}$.
   $f' = u' + v'$ avec $\begin{cases} u'(x) = 1 \\ v'(x) = -\dfrac{1}{x^2} \end{cases}$.
   Alors : $f'(x) = 1 + \left(-\dfrac{1}{x^2}\right) = \boxed{1 - \dfrac{1}{x^2}}$
3. $f(x) = (3x+5)\sqrt{x}$ sur $\mathbb{R}^+$.
   $f = uv$ avec $\begin{cases} u(x) = 3x + 5 \\ v(x) = \sqrt{x} \end{cases}$.
   f est dérivable sur $]0\ ;\ +\infty[$.
   Alors $f' = u'v + uv'$ avec $\begin{cases} u'(x) = 3 \\ v'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}} \end{cases}$
   On en déduit : $f'(x) = 3\sqrt{x} + (3x+5) \times \dfrac{1}{2\sqrt{x}} = 3\sqrt{x} + \dfrac{3x+5}{2\sqrt{x}} = \dfrac{3\sqrt{x \times 2\sqrt{x} + (3x+5)}}{2\sqrt{x}} = \dfrac{6x + (3x+5)}{2\sqrt{x}} = \dfrac{9x+5}{2\sqrt{x}}$
   car $3\sqrt{x} \times 2\sqrt{x} = 3 \times 2 \times \left(\sqrt{x}\right)^2 = 6x$.
4. $f(x) = \dfrac{2x+5}{3x-7}$ sur $\mathbb{R} \setminus \left\{\dfrac{7}{3}\right\}$.
   $f = \dfrac{u}{v}$ avec $\begin{cases} u(x) = 2x + 5 \\ v(x) = +x - 7 \end{cases}$.
   Alors : $f' = \left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$ avec $\begin{cases} u'(x) = 2 \\ v'(x) = 3 \end{cases}$.
   Donc : $f'(x) = \dfrac{2(3x-7) - 3(2x+5)}{(3x-7)^2} = \dfrac{6x - 14 - 6x - 15}{(3x-7)^2} = \boxed{-\dfrac{29}{(3x-7)^2}}$

V Variations d'une fonction

Théorème (admis)

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I.

- f est constante sur I si, et seulement si, $f' = 0$ sur I.
- f est croissante sur I si, et seulement si, f' est strictement positive sur I sauf éventuellement pour un certain nombre fini de valeurs isolées pour lesquelles elle s'annule.
- f est décroissante sur I si, et seulement si, f' est strictement négative sur I sauf éventuellement pour un certain nombre fini de valeurs isolées pour lesquelles elle s'annule.

Exemples :

1. $f(x) = x^2$ sur $\mathbb{R}$; $f'(x) = 2x$ qui est négatif sur $\mathbb{R}^-$ et positif sur $\mathbb{R}^+$.
   On en déduit que f est décroissante sur $\mathbb{R}^-$ et croissante sur $\mathbb{R}^+$.
2. $f(x) = \dfrac{1}{x}$ sur $\mathbb{R}^*$; $f'(x) = -\dfrac{1}{x^2} < 0$.
   On en déduit que f est décroissante sur $]-\infty\,;\,0[$; de même que sur $]0\,;\,+\infty$.
   Remarque : la monotonie a lieu sur des **intervalles**.
3. $f(x) = \sqrt{x}$ sur $\mathbb{R}^+$.; f est dérivable sur –0 ; $=\infty[$ et $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}} > 0$ donc la fonction f est décroissante sur $[0\,;\,+\infty[$.
4.

Soit f la fonction définie par : $f(x) = x^3$ définie sur $\mathbb{R}$.
$f'(x) = 3x^2 > 0$ pour $x \neq 0$ et $f'(x) = 0$ pour $x = 0$.
On en déduit que la fonction f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
La courbe $\mathscr{C}_f$ admet une tangente horizontale en 0.