Primitives d'une fonction continue

Table des matières

I Équation différentielle

Définition

On appelle équation différentielle une équation à une inconnue dont l'inconnue est une **fonction** et faisant intervenir la fonction, sa dérivée et éventuellement les dérivées d'ordre deux, trois, etc.

Exemples

a) $y' = y$, équation différentielle dont la fonction exponentielle est une solution car $\exp' = \exp$

b) Équation du pendule simple : une masse est suspendue à un fil de longueur L à l'équilibre, donc verticalement.
On écarte la masse de sa position d'équilibre et on note θ l'angle formé avec la verticale.
Cet angle dépend de t et vérifie l'équation différentielle $\theta'' - \dfrac{g}{L}\sin\theta = 0$ (qu'on ne sait pas résoudre, si ce n'est de manière approchée!)

II Équation différentielle $\mathbf{y'} = \mathbf{f}$

f est une fonction continue sur un intervalle I.

II.1 Primitive d'une fonction continue

Définition

Soit F une fonction définie sur I. On dit que F est une primitive de f sur I si F est dérivable sur I et $F' = f$.
On dit alors que F est une solution de l'équation différentielle $y' = f$.

Exemples :

a Soit l'équation différentielle $y' = x^2$. (remarque, on commet un abus de langage, car x^2 est un nombre, pas une fonction).
Soit $F(x) = \dfrac{1}{3}x^3$; $F'(x) = \dfrac{1}{3} \times 3x^2 = x^2$ donc F est solution de l'équation différnetielle $y' = x^2$.

On peut remarque que $G_k(x) = F(x) = k$, où $k \in \mathbb{R}$, vérifie aussi $F' = x^2$, donc G_k est aussi une solution, quelle que soit la valeur de k, ce qui montre qu'il n'y a pas unicité d'une primitive.

b Soit l'équation différentielle $y' = \dfrac{1}{x}$ sur $]0\,;\,+\infty[$;

F définie par $F(x) = \ln x$ est solution de cette équation différentielle car $\ln'(x) = \dfrac{1}{x}$.

Théorème (admis)

Toute fonction continue sur un intervalle I admet des primitives sur cet intervalle.

Théorème

Deux primitives d'une même fonction sur un intervalle diffèrent d'une constante.

Démonstration.

Soit f une fonction continue sur un intervalle I.

- Soit F une primitive de f donc $F' = f$.
  Soit $k \in \mathbb{R}$ une constante. $(F+k)' = F' + 0 = f$ donc $F + k$ est aussi une primitive de f.
- Soient F et G deux primitives de f sur I.
  Alors $F' = f$ et $G' = f$.
  $G - F$ est dérivable ; $(G-F)' = G' - F' = f - f = 0$ donc $(G-F)' = 0$.
  $G - F$ est donc constant ; $G - F = k$ d'où $G = F + k$, $k \in \mathbb{R}$.

Propriété

On considère l'équation différentielle $y' = f$.
Soient x_0 et y_0 deux réels.
Il existe une unique solution de cette équation différentielle, donc une unique primitive F de f, telle que $F(x_0) = y_0$

Démonstration :

f est continue, donc admet une primitive F. Les autres primitives de f sont de la forme $F + k$.
On doit avoir $F(x_0) = y_0$ donc $k = y_0 - F(x_0)$; k est donc unique et la primitive aussi.

Exemple : soit $f(x) = \mathrm{e}^{3x}$.
Une primitive de f est $F(x) = \dfrac{1}{3}\mathrm{e}^{3x}$ car $F'(x) = 3\mathrm{e}^{3x}$.
Il y a une seule primitive G de f vérifiant $G(0) = -1$.
$G(x) = F(x) + k = \dfrac{1}{3}\mathrm{e}^{3x} + k$; $G(0) = -1 \Leftrightarrow k = -\dfrac{1}{3}$ donc $\boxed{G(x) = \dfrac{1}{3}x - \dfrac{1}{3}}$

II.2 Primitives des fonctions usuelles

Par lecture inverse du tableau des dérivées des fonctions usuelles, on obtient les résultats suivants :

Fonction	une primitive	validité sur
$f(x)=a\in\mathbb{R}$	$F(x)=ax$	$\mathbb{R}$
$f(x)=x^n (n\in\mathbb{N}^*)$	$F(x)=\dfrac{x^{n+1}}{n+1}$	$\mathbb{R}$
$f(x)=\dfrac{1}{x}$	$F(x)=\ln(x)$	$]0\ ;\ +\infty[$
$f(x)=\dfrac{1}{x^2}$	$F(x)=-\dfrac{1}{x}$	$\mathbb{R}^*$
$f(x)=\dfrac{1}{x^n},\ n\in\mathbb{N},\ n>1$	$F(x)=-\dfrac{1}{(n-1)x^{n-1}}$	$\mathbb{R}^*$
$f(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$	$F(x)=\sqrt{x}$	$]0;+\infty[$
$f(x)=\mathrm{e}^x$	$F(x)=\mathrm{e}^x$	$\mathbb{R}$
$f(x)=\cos x$	$F(x)=\sin x$	$\mathbb{R}$
$f(x)=\sin x$	$F(x)=-\cos x$	$\mathbb{R}$
Hors-programme : $f(x)=1+\tan^2 x=\dfrac{1}{\cos^2 x}$	$F(x)=\tan x$	$\left](2k-1)\dfrac{\pi}{2};(2k+1)\dfrac{\pi}{2}\right[$, $k\in\mathbb{Z}$

II.3 Primitives et opérations :

Soient u et v deux fonctions admettant des primitives respectives U et V sur un intervalle I et g une fonction admettant une primitive G sur un intervalle J contenant l'intervalle $u(I)$.
On note u' la dérivée de u.

Fonction	une primitive	validité
$f=\alpha u+\beta v((\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2)$	$F=\alpha U+\beta V$	I
$f=u'\times g\circ u$	$F=G\circ u$	I
$f=u'u^n(n\in\mathbb{N}^*$	$\dfrac{u^{n+1}}{n+1}$	I
$f=\dfrac{u'}{u}$	$\ln\lvert u\rvert$	u ne s'annule pas sur I
$f=\dfrac{u'}{u^n},\ n\in\mathbb{N},\ n>1$	$F=-\dfrac{1}{(n-1)u^{n-1}}$	u ne s'annule pas sur I
$f=\dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$	$F=\sqrt{u}$	$u>0$ sur I
$f=u'\mathrm{e}^u$	$F=\mathrm{e}^u$	
$f=u'\cos(u)$	$\sin(u)$	I
$f=u'\sin(u)$	$-\cos(u)$	I

Cela vient des formules de dérivation.

Exemple :

Résoudre l'équation différentielle $y' = \dfrac{x}{\left(x^2+1\right)^2}$ (E).

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{x}{\left(x^2+1\right)^2}$.

f est continue sur $\mathbb{R}$ donc f admet des primitives sur $\mathbb{R}$.

On remarque que $f(x) = x \times \dfrac{1}{\left(x^2+1\right)^2}$.

Posons $u(x) = x^2+1$; alors $u'(x) = 2x$.

On voit que $f = \dfrac{1}{2}u'(x) \times \dfrac{1}{u^2}$ dont une primitive est $F = \dfrac{1}{2} \times \left(-\dfrac{1}{u}\right)$.

Par conséquent : $F(x) = -\dfrac{1}{2} \times \dfrac{1}{x^2+1} = \boxed{-\dfrac{1}{2\left(x^2+1\right)}}$

Exemple

Soit h la fonction définie par : $h(x) = (x-1)\mathrm{e}^{-2x}+1$.

Montrer que H définie par $H(x) = \dfrac{1}{4}(1-2x)\mathrm{e}^{-2x}+x$ est une primitive de h.

$$H'(x) = \frac{1}{4}\left[-2\mathrm{e}^{-2x} - 2(1-2x)\mathrm{e}^{-2x}\right]+1 = \frac{1}{4}\left[-2-2+4x\right]\mathrm{e}^{-2x}+1 = (x-1)\mathrm{e}^{-2x}+1 = h(x).$$

Pour tout x, $H'(x) = h(x)$ donc H est bien une primitive de h.