Spé maths : correction du DM nº 1

I

Résoudre les équations et inéquations suivantes :

a) $9x^2+4x+5=0$.
$\Delta = 4^2-4\times 9\times 5 = 16-180<0$; $\Delta<0$ donc cette équation n'a pas de solution dans $\mathbb{R}$: $\boxed{\mathscr{S}=\emptyset}$.

b) $2x^2+28x=15 \Leftrightarrow 2x^2+28x-15=0$
$\Delta = 28^2-4\times 2\times(-15) = 784+120 = 904>0$.
$\Delta>0$ donc cette équation a deux solutions réelles :
$x_1 = \dfrac{-28-\sqrt{904}}{4} = \dfrac{-28-\sqrt{4\times 226}}{4} = \dfrac{-28-2\sqrt{226}}{4} = \dfrac{-14-\sqrt{226}}{2}$.
$x_2 = \dfrac{-14+\sqrt{226}}{2}$.
$\boxed{\mathscr{S}=\left\{\dfrac{-14-\sqrt{226}}{2}\,;\,\dfrac{-14+\sqrt{226}}{2}\right\}}$.

c) $x^2+2x+3<0$
$\Delta = 2^2-4\times 1\times 3 = 4-12 = -8<0$.
$\Delta<0$ donc le trinôme du second degré est du signe du coefficient de x^2 pour tout x, donc positif.
L'inéquation n'a donc pas de solution (graphiquement, la courbe représentative associée est une parabole, tournée vers la haut, au-dessus de l'axe des abscisses).
$\boxed{\mathscr{S}=\emptyset}$.

d) $x^2+x-1\leqslant 0$.
$\Delta = 1^2-4\times 1\times(-1) = 5>0$.
Il y a deux racines : $x_1 = \dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}$ et $x_2 = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$.
On sait qu'un trinôme du second degré qui a deux racines est du signe du coefficient de x^2 à l'extérieur de l'intervalle formé par les racines et du signe opposé enrre les racines.
On a donc le tableau de signes suivant :

x	$-\infty$		$\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$		$\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$		$+\infty$
x^2+x-1		$+$	0	$-$	0	$+$	

L'ensemble des solutions est donc :

$$\boxed{\mathscr{S}=\left[\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}\,;\,\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}\right]}$$

e) $x^4-6x^2+8=0$.
On effectue un changement de variable en posant $X=x^2$.
Alors : $x^4-6x^2+8=0 \Leftrightarrow \begin{cases} X^2-6X+8=0 \\ X=x^2 \end{cases}$.
On résout l'équation $X^2-6X+8=0$.
$\Delta=4>0$ donc cette équation a deux solutions.
$X_1 = \dfrac{6-\sqrt{4}}{2} = 2$ et $X_2 = \dfrac{6+\sqrt{4}}{2} = 4$.
On résout alors les équations $x^2=X_1$ et $x^2=X_2$.
$x^2=2$ a pour solutions $-\sqrt{2}$ et $\sqrt{2}$.
$x^2=4$ a pour solutions -2 et 2.
L'ensemble des solutions de cette équation est

$$\boxed{\mathscr{S}=\{-2\,;\,-\sqrt{2}\,;\,\sqrt{2}\,;\,2\}}.$$

II

(u_n) est la suite arithmétique de raison $r=3$ et telle que $u_3=5$.
On sait que si (u_n) est arithmétique de raison r,
$u_n = u_0+nr$ donc $u_0 = u_n-nr$.
On en déduit :

- $u_0 = u_3-3r = 5-3\times 3 = -4$; $\boxed{u_0=-4}$
- $u_{24} = u_0+24r = -4+24\times 3 = 68$; $\boxed{u_{24}=68}$.

III

(u_n) est une suite géométrique de raison q et telle que $u_2=54$ et $u_4=162$.

Si (u_n) est géométrique de raison q, $u_n = u_0q^n$ et $u_n = u_p\times q^{n-p}$.

1. D'après le rappel, on a $u_4 = u_2\times q^2$ donc $q^2 = \dfrac{u_4}{u_2} = \dfrac{162}{54} = 3$.
   On a : $q^2=3$ donc $\boxed{q=-\sqrt{3}}$ ou $\boxed{q=\sqrt{3}}$.
   Il y a donc deux suites possibles, l'une de raison $-\sqrt{3}$ et l'autre de raison $\sqrt{3}$.
2. $u_2 = u_0q^2$ donc $u_0 = \dfrac{u_2}{q^2} = \dfrac{54}{3} = 18$; $\boxed{u_0=18}$

IV

(u_n) est la suite arithmétique de raison 6 telle que $u_0=7$.
(v_n) est la suite définie pour tout nombre n de $\mathbb{N}$. par $v_n = 5u_n-1$.
(u_n) est arithmétique de raison $r=6$ donc $u_{n+1} = u_n+r$.
Pour tout $n\in\mathbb{N}$, $v_{n+1} = 5u_{n+1}-1 = 5(u_n+r)-1$

$= 5u_n + 5r - 1 = 5u_n - 1 + 5r = v_n + 5r$ donc $\boxed{v_{n+1} = v_n + 5r}$.
On en déduit que la suite (v_n) est **arithmétique**, de raison $\boxed{5r}$.
On remarque que la valeur de u_0 ne joue aucun rôle!
Le calcul de quelques termes ne suffit pas à montrer une propriété générale!

V

(u_n) est la suite de nombres réels strictement positifs définie par $u_0 = 2$ et pour tout nombre $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} = \frac{u_n}{u_n + 1}.$$

(v_n) est la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $v_n = \dfrac{1}{u_n}$.

a) Soit la propriété $P(n)$: $u_n > 0$.
Démontrons cette propriété par **récurrence** :

- **initialisation** : on a $u_0 = 2 > 0$ donc $P(0)$ est vraie.
- **Hérédité** : supposons que $P(n)$ soit vraie pour n quelconque, donc $u_n > 0$
  Alors $u_{n+1} = \dfrac{u_n}{u_n + 1} > 0$ car $u_n > 0$ d'après l'hypothèse de récurrence et $u_n + 1 > 1 > 0$ d'après la même hypothèse.
  La propriété $P(n)$ est donc **héréditaire**.

D'après l'axiome de récurrence, $u_n > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
Puisque $u_n > 0$, $v_n = \dfrac{1}{u_n}$ est défini puisqu'on calcule el'inverse d'un nombre non nul.

b) On a : $u_1 = \dfrac{u_0}{u_0 + 1} = \boxed{\dfrac{2}{3}}$; $u_2 = \dfrac{u_1}{u_1 + 1} = \dfrac{\frac{2}{3}}{\frac{2}{3} + 1} = \dfrac{\frac{2}{3}}{\frac{5}{3}} = \boxed{\dfrac{2}{5}}$;
$u_3 = \dfrac{\frac{2}{5}}{\frac{2}{5} + 1} = \dfrac{\frac{2}{5}}{\frac{7}{5}} = \boxed{\dfrac{2}{7}}$ et $\boxed{u_4 = \dfrac{2}{9}}$
Alors : $\boxed{v_1 = \dfrac{3}{2}}$; $\boxed{v_2 = \dfrac{5}{2}}$; $\boxed{v_3 = \dfrac{7}{2}}$; $\boxed{v_4 = \dfrac{9}{2}}$.

c) Montrons que (v_n) est arithmétique :
pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = \dfrac{1}{u_{n+1}} = \dfrac{1}{\frac{u_n}{u_n+1}} = \dfrac{u_n + 1}{u_n} = \dfrac{u_n}{u_n}$
$= \dfrac{1}{u_n} = 1 + \dfrac{1}{u_n} = 1 + v_n = v_n + 1$ donc $\boxed{v_{n+1} = v_n + 1}$.
(v_n) est donc **arithmétique**, de raison $\boxed{r = 1}$.
Là encore, le calcul des premiers termes ne suffit pas à montrer que la suite est arithmétique!

d)
- Puisque (v_n) est arithmétique de raison $r = 1$,
  $v_n = v_0 + 1 \times n$ avec $v_0 = \dfrac{1}{u_0} = \dfrac{1}{2}$ d'où $v_n = \dfrac{1}{2} + n$
  $= \boxed{\dfrac{2n+1}{2}}$.
- $v_n = \dfrac{1}{u_n} \Leftrightarrow u_n = \dfrac{1}{v_n}$ donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\boxed{u_n = \dfrac{2}{2n+1}}$

On peut vérifier que l'on retrouve bien les premiers termes calculés à la première question.

VI Évaporation

En période de sécheresse, une piscine perd chaque semaine un vingtième de son contenu par évaporation. En début de période, elle contient 60 m^3 d'eau. On suppose que la sécheresse dure 8 semaines et que l'on n'ajoute pas d'eau.
On note $V_0 = 60$ le volume de départ puis V_1, V_2, $\dots V_n$ les volumes d'eau de la piscine au bout respectivement, d'une semaine, de deux semaines, ..., de n semaines.

a) On a :

- $V_1 = V_0 - \dfrac{1}{20}V_0 = \left(1 - \dfrac{1}{20}\right)V_0 = \dfrac{19}{20}V_0 = \dfrac{19}{20} \times 60$
  $= 19 \times 3 = \boxed{57}$.
- $V_2 = \dfrac{19}{20}V_1 = \dfrac{19}{20} \times 57 = \boxed{\dfrac{1083}{20} = 54,15}$

b) Le coefficient multiplicateur associé à une baisse de $\dfrac{1}{20}$ est $1 - \dfrac{1}{20} = \dfrac{19}{20}$ donc $\boxed{V_{n+1} = \dfrac{19}{20}V_n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

c) On en déduit que la suite (V_n) est **géométrique**, de raison $\boxed{q = \dfrac{19}{20}}$.

d) Pour tout n, $V_n = V_0 q^n = \boxed{60 \times \left(\dfrac{19}{20}\right)^n}$.

Alors : $V_8 = \boxed{60 \times \left(\dfrac{19}{20}\right)^8 \approx 39,8\text{m}^3}$.
Au bout de 8 semaines, il resterait 39,8 m^3 d'eau.