Correction des xercices de démonstration par récurrence

Exercice I

Soit (u_n) la suite définie par $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = 2u_n - 5 \end{cases}$.

Montrons, par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 5 - 4 \times 2^n$. Notons P_n cette propriété.

- **Initialisation** : au rang $n = 0$, $5 - 4 \times 2^n = 5 - 4 \times 2^0 = 5 - 4 \times 1 = 5 - 4 = 1 = u_0$ donc :
  $\boxed{u_0 = 5 - 4 \times 2^0}$; p_0 est vraie.
- **Hérédité** :
  On suppose la propriété vraie pour un rang n quelconque, donc $u_n = 5 - 4 \times 2^n$ (hypothèse de récurrence).
  Alors, au rang $n+1$: $u_{n+1} = 2u_n - 5$ (par définition de la suite)
  $= 2\left(5 - 4 \times 2^n\right) - 5$ (d'après l'hypoth!-èse de récurrence)
  $= 10 - 2 \times \left(4 \times 2^n\right) - 5 = 10 - 4 \times 2 \times 2^n - 5 = \boxed{5_4 \times 2^{n+1}}$ ce qu'il fallait démontrer.
  On a montré que si p_n est vraie, alors p_{n+1} est vraie.
  La propriété est héréditaire.

D'après l'axiome de récurrence, elle est vraie pour tout n donc $\boxed{u_n = 5 -' \times 2^n}$

Exercice II Extrait du sujet de bac Polynésie juin 2012

Soit la suite (u_n) définie par $u_0 = 0$ et pour tout $n \geqslant 0$, $u_{n+1} = 3u_n - 2n + 3$.
Démontrons par récurrence sur n que, pour tout entier naturel n, $u_n \geqslant n$.

- **Initialisation :** $u_0 = 0 \geqslant 0$ donc la propriété est vraie au rang $n = 0$
- **Hérédité** : on suppose la propriété vraie au rang n, donc $u_n \geqslant n$.
  Alors $u_{n+1} = 3u_n - 2n + 3 \geqslant 3n - 2n + 3 \geqslant n + 3 \geqslant n + 1$ donc la propriété est vraie au rang $n+1$; elle est donc héréditaire.

D'après l'axiome de récurrence, la propriété est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.
$\boxed{\text{Pour tout } n \in \mathbb{N},\ u_n \geqslant n}$.