Correction de la feuille d'exercices sur la convexité

I

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (3x+1)\mathrm{e}^{2x+1} - 1$.

1. f est dérivable sur $\mathbb{R}$; $f = u\mathrm{e}^{v} - 1$ avec $\begin{cases} u(x) = 3x+1 \\ v(x) = 2x+1 \end{cases}$.

   $f' = u'\mathrm{e}^{x} + u\left(\mathrm{e}^{v}\right)' = u'\mathrm{e}^{v} + uv'\mathrm{e}^{v}$ avec $u'(x) = 3$ et $v'(x) = 2$.

   Alors : $f'(x) = 3\mathrm{e}^{2x+1} + 2(3x+1)\mathrm{e}^{2x+1} = (3 + 2(3x+1))\,\mathrm{e}^{2x+1} = \boxed{(6x+5)\mathrm{e}^{2x+1}}$

2. $f'(x) = 0$ pour $x = -\frac{5}{6}$ et est du signe de $6x+5$, donc $f'(x) \geqslant 0$ sur $\left[-\frac{5}{6}\ ;\ 1\right]$. On en déduit le tableau de variation sur $\left[-\frac{5}{6}\ ;\ 1\right]$:

x	$-\frac{5}{6}$		1
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$	$\approx -1,77$	$\nearrow$	≈ 79

   $f(x)$ passe d'une valeur négative à une valeur positive, en étant croissante, donc il existe une unique valeur α dans l'intervalle $\left[-\frac{5}{6}\ ;\ 1\right]$ telle que $f(\alpha) = 0$.

   À la calculatrice, on trouve $\boxed{\alpha \approx -0,16}$.

3. On en déduit le signe de $f(x)$ sur $\left[-\frac{5}{6}\ ;\ 1\right]$.

x	$-\frac{5}{6}$		α		1
$f(x)$		$-$	0	$+$	

   $f''(x) = 6\mathrm{e}^{2x+1} + 2(6x+5)\mathrm{e}^{x+1} = (12x+16)\mathrm{e}^{2x+1} = \boxed{4(3x+4)\mathrm{e}^{2x+1}}$.

   $f''(x)$ s'annule en $-\frac{4}{3}$ et change de signe en $-\frac{4}{3}$.

   $f''(x) \leqslant 0$ pour $x \leqslant -\frac{4}{3}$ et $f''(x) \geqslant 0$ pour $x \geqslant -\frac{4}{3}$.

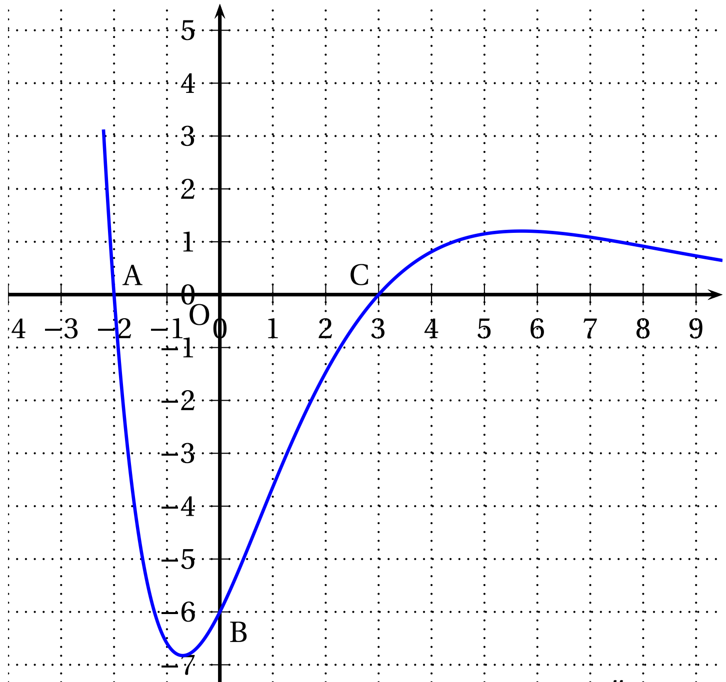
x	$-\infty$		$-\frac{4}{3}$		$+\infty$
$f''(x)$		$-$	0	$+$	
f		concave		convexe	

   $\mathscr{C}_f$ a un point d'inflexion de $-\frac{4}{3}$; ses coordonnées sont $\left(-\frac{4}{3}\ ;\ -3\mathrm{e}^{-\frac{5}{3}} - 1\right)$

II Bac ES Métropole septembre 2014

On considère une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ et deux fois dérivable. On donne ci-dessous la courbe représentative de la fonction f'', dérivée seconde de la fonction f, dans un repère orthonormé.

Les points suivants appartiennent à la courbe : A$(-2\ ;\ 0)$; B$(0\ ;\ -6)$ et C$(3 ; 0)$.



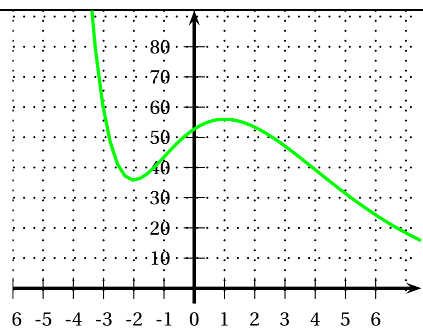
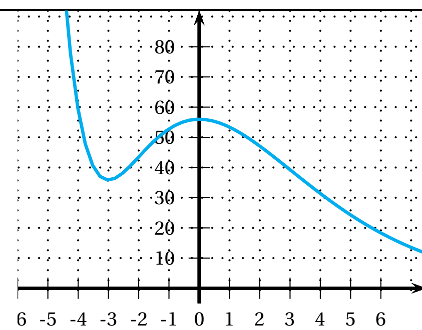
Courbe représentative de la fonction f''

1. La courbe représentative de la fonction f admet un point d'inflexion si cette courbe traverse sa tangente, autrement dit si la dérivée seconde de f s'annule et change de signe.

   D'après sa courbe représentative, la fonction f'' s'annule et change de signe en $x = -2$ et $x = 3$; donc la courbe représentant la fonction f admet deux points d'inflexion, aux points d'abscisses -2 et 3.

2. Sur l'intervalle $[-2\ ;\ 3]$, la courbe représentant la fonction f'' est située en dessous de l'axe des abscisses, donc $f'' \leqslant 0$. Cela veut dire que, sur cet intervalle, la fonction dérivée première f' est décroissante, et donc que la fonction f est concave.

3. On donne les deux courbes :

Courbe 1	Courbe 2
	

   La courbe 1 représente une fonction qui admet en $x = -2$ un minimum ; au point d'abscisse -2, la courbe ne traverse pas sa tangente, donc le point d'abscisse -2 n'est pas un point d'inflexion. Donc la courbe 1 ne représente pas la fonction f.

   La fonction f est représentée par la courbe 2.