Correction de la feuille d'exercices de bac

I Bac S Antilles-Guyane juin 2018

Le directeur d'une réserve marine a recensé 3 000 cétacés dans cette réserve au 1er juin 2017. Il est inquiet car il sait que le classement de la zone en « réserve marine » ne sera pas reconduit si le nombre de cétacés de cette réserve devient inférieur à 2 000.

Une étude lui permet d'élaborer un modèle selon lequel, chaque année :

— entre le 1er juin et le 31 octobre, 80 cétacés arrivent dans la réserve marine ;

— entre le 1er novembre et le 31 mai, la réserve subit une baisse de 5 % de son effectif par rapport à celui du 31 octobre qui précède.

On modélise l'évolution du nombre de cétacés par une suite (u_n). Selon ce modèle, pour tout entier naturel n, u_n désigne le nombre de cétacés au 1er juin de l'année $2017+n$. On a donc $u_0=3000$.

1. $u_1=(u_0+80)\times 0,95=0,95\times 3080=\boxed{2926}$.
2. Pour tout $n\in\mathbb{N}$, $u_{n+1}=(u_n+80)\times 0,95=\boxed{0,95u_n+76}$.
3. À l'aide d'un tableur, on a calculé les 8 premiers termes de la suite (u_n). Le directeur a configuré le format des cellules pour que ne soient affichés que des nombres arrondis à l'unité.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	n	0	1	2	3	4	5	6	7
2	u_n	3 000	2 926	2 856	2 789	2 725	2 665	2 608	2 553

En C2, on doit taper « =0.95*B2+76 »

4. (a) Montrons par récurrence que, pour tout n, $u_n\geqslant 1520$.
   - **Initialisation** : $u_0=3000\geqslant 1520$ donc la propriété est vraie au rang 0.
   - **Hérédité** : On suppose que $u_n\geqslant 1520$ pour un entier n quelconque.
     Alors : $0,95u_n\geqslant 0,95\times 1520$ d'où $0,95u_n+76\geqslant 0,95\times 1520+76=1520$ donc la propriété est héréditaire.

   D'après l'axiome de récurrence, la propriété est vraie pour tout n.

   (b) Pour tout n, $u_{n+1}-u_n=0,95u_n+76-u_n=-0,05u_n+76=-0,05\,(u_n-1520)\leqslant 0$ car on a montré que $u_n\geqslant 1520$.
   La suite (u_n) est bien décroissante.

   (c) La suite (u_n) est décroissante et minée par 1 250, donc convergente (vers une limite ℓ avec $\ell\geqslant 1520$).

5. On désigne par (v_n) la suite définie par, pour tout entier naturel n, $v_n=u_n-1520$.

   (a) Pour tout n, $v_{n+1}=u_{n+1}-1520=0,95u_n+76-1520=0,95u_n-1444=0,95\,(u_n-1520)$ $=\boxed{0,95v_n}$.
   La suite (v_n) est géométrique, de raison $q=0,95$ et de premier terme $v_0=u_0-1520=3000-1520$ $=1480$.

   (b) Par conséquent, puisque (v_n) est géométrique, $v_n=v_0q^n=1480\times 0,95^n$ donc $\boxed{u_n=1480\times 0,95^n+1520}$.

   (c) $-1<0,95<1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty}0,05^n=0$ d'où $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=1520}$.

6. Recopier et compléter l'algorithme suivant pour déterminer l'année à partir de laquelle le nombre de cétacés présents dans la réserve marine sera inférieur à 2 000.

```
n ← 0
u ← 3 000
Tant que u>2000
    n ← n+1
    u ← 0.95*u+76
Fin de Tant que
```

7. On a vu que la limite de la suite est 1 520 donc il y a une valeur de la suite pour laquelle $u_n < 1200$.
À la calculatrice, on trouve $\boxed{n = 22}$.

II Bac S : Nouvelle Calédonie mars 2019

On considère la suite (u_n) à valeurs réelles définie par $u_0 = 1$ et, pour tout n, $u_{n+1} = \dfrac{u_n}{u_n + 8}$.

Partie A : Conjectures

Les premières valeurs de la suite (u_n) ont été calculées à l'aide d'un tableur dont voici une capture d'écran :

	A	B
1	n	u_n
2	0	1
3	1	0,111 111 11
4	2	0,013 698 63
5	3	0,001 709 4
6	4	0,000 213 63
7	5	2,670 3E−05
8	6	3,337 9E−06
9	7	4,172 3E−07
10	8	5,215 4E−08
11	9	6,519 3E−09
12	10	8,149 1E−10

1. La formule à entrer dans la cellule B3 et à copier vers le bas pour obtenir les valeurs des premiers termes de la suite (u_n) est `= B2 / (B2 + 8)`
2. La suite (u_n) semble décroissante.
3. La suite (u_n) semble converger vers 0.
4. On écrit un algorithme calculant u_{30} :

Variables	i entier et u réel
Initialisation	u prend la valeur 1
Traitement	Pour i variant de 1 à 30
	u prend la valeur $\dfrac{u}{u+8}$
	Fin pour
Sortie	Afficher u

Partie B : Étude générale

1. On va démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a $u_n > 0$.

    - **Initialisation** : Pour $n = 0$, $u_n = u_0 = 1 > 0$; donc la propriété est vraie au rang 0.
    - **Hérédité** : On suppose la propriété vraie pour un rang n quelconque, c'est-à-dire que $u_n > 0$.
    $u_{n+1} = \dfrac{u_n}{u_n + 8}$
    Or $u_n > 0$ donc $u_n + 8 > 0$ donc $\dfrac{u_n}{u_n+8} > 0$; on a donc démontré que $u_{n+1} > 0$.
    - On a vérifié que la propriété était vraie pour $n = 0$. On a démontré que la propriété était héréditaire pour tout $n \geqslant 0$. Donc, d'après le principe de récurrence, on peut dire que la propriété est vraie pour tout $n \geqslant 0$.

    On a donc démontré que $u_n > 0$ pour tout n.

2. Pour tout n : $u_{n+1} - u_n = \dfrac{u_n}{u_n+8} - u_n = u_n\left(\dfrac{1}{u_n+8} - 1\right) = u_n\left(\dfrac{1-u_n-8}{u_n+8}\right) = \dfrac{u_n(-u_n-7)}{u_n+8} = \boxed{-\dfrac{u_n(u_n+7)}{u_n+8}}$
    Pour tout n, on a $u_n > 0$ donc $u_n + 8 > 0$ et $u_n + 7 > 0$ donc $\boxed{u_{n+1} - u_n < 0}$
    La suite (u_n) est donc décroissante.
3. La suite (u_n) est décroissante et minorée par 0.
    Donc, d'après le théorème de la convergence monotone, la suite (u_n) est **convergente**.

Partie C : Recherche d'une expression du terme général

On définit la suite (v_n) en posant, pour tout entier naturel n, $v_n = 1 + \dfrac{7}{u_n}$.

On en déduit que $v_n - 1 = \dfrac{7}{u_n}$ donc que $u_n = \dfrac{7}{v_n - 1}$.

1. - $v_{n+1} = 1 + \dfrac{7}{u_{n+1}} = 1 + \dfrac{7}{\dfrac{u_n}{u_n+8}} = 1 + \dfrac{7(u_n+8)}{u_n} = 1 + \dfrac{7u_n}{u_n} + \dfrac{7\times 8}{u_n} = 1 + 7 + \dfrac{7\times 8}{u_n} = 8\left(1 + \dfrac{7}{u_n}\right) = \boxed{8v_n}$.
    - $v_0 = 1 + \dfrac{7}{u_0} = 1 + \dfrac{7}{1} = 8$

    Donc la suite (v_n) est **géométrique** de raison $q = 8$ et de premier terme $v_0 = 8$.
2. On déduit de la question précédente que, pour tout n, $v_n = v_0 \times q^n = 8 \times 8^n = 8^{n+1}$.
    Or $u_n = \dfrac{7}{v_n - 1}$, donc, pour tout n, on a $u_n = \dfrac{7}{8^{n+1} - 1}$.
3. $8 > 1$ donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} 8^{n+1} = +\infty$ donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \dfrac{7}{8^{n+1}-1} = 0$ ce qui veut dire que $\boxed{\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n = 0}$.
4. On cherche dans cette question le plus petit entier naturel n_0 tel que, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à n_0, $u_n < 10^{-18}$.
    On sait que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$; donc, d'après la définition de la limite d'une suite, on peut dire qu'à partir d'un certain rang n_0, tous les termes de la suite seront dans l'intervalle $\left]-10^{-18} ; 10^{-18}\right[$. Comme $u_n > 0$ pour tout n, on peut dire qu'il existe un rang n_0 tel que, pour $n > n_0$, on ait $u_n < 10^{-18}$.
    On résout l'inéquation $u_n < 10^{-18}$. (cela nécessite l'utilisation de la fonction ln que nous verrons plus tard)

$$u_n < 10^{-18} \iff \frac{7}{8^{n+1}-1} < 10^{-18} \iff 7 < 10^{-18}\left(8^{8n+1}-1\right) \iff 7\times 10^{18}+1 < 8^{n+1}$$

$$\iff \ln\left(7\times 10^{18}+1\right) < \ln\left(8^{n+1}\right) \iff \ln\left(7\times 10^{18}+1\right) < (n+1)\ln(8)$$

$$\iff \frac{\ln\left(7\times 10^{18}+1\right)}{\ln(8)} < n+1 \iff n > \frac{\ln\left(7\times 10^{18}+1\right)}{\ln(8)} - 1$$

Or $n > \dfrac{\ln\left(7\times 10^{18}+1\right)}{\ln(8)} - 1 \approx 19{,}87$ donc c'est à partir de $n_0 = 20$ que $u_n < 10^{-18}$.