Correction de l'exercice centres étrangers groupe 1 sujet 1

L'espace est muni d'un repère orthonormé $\left(O\,;\,\vec{i}\,;\,\vec{j}\,;\,\vec{k}\right)$.
On considère les points A(5 ; 0 ; −1), B(1 ; 4 ; −1), C(1; 0; 3), D(5; 4; 3) et E(10; 9; 8).

1. (a) • On a R(3 ; 2 ; −1) ;
   • $\vec{AB}\begin{pmatrix}-4\\4\\0\end{pmatrix}$.

   (b) Si $\vec{AB}$ est un vecteur normal au plan $\mathscr{P}_1$ passant par R, on sait qu'une équation de ce plan est :
   $-4\left(x-x_R\right)+4\left(y-y_R\right)+0\left(z-z_R\right)=0$
   $\iff -4x+4y=-4 \iff \boxed{x-y-1=0}$. (en simplifiant par -4).

   (c) On a E(10 ; 9 ; 8).
   $x_E-y_E-1=10-9-1=0$ donc $\boxed{E\in\mathscr{P}_1}$.

   D'autre part $\vec{EA}\begin{pmatrix}-5\\-9\\-9\end{pmatrix}$ et $\vec{EB}\begin{pmatrix}-9\\-5\\-9\end{pmatrix}$.

   On en déduit : $\text{EA}^2=25+81+81=\boxed{187}$ et $\text{EA}^2=81+25+81=\boxed{187}$.
   $\text{EA}^2=\text{EB}^2\Rightarrow\boxed{\text{EA}=\text{EB}}$. (Puisque des distances sont des nombres positifs)

2. On considère le plan $\mathscr{P}_2$ d'équation cartésienne $x-z-2=0$.

   (a) On a vu que le plan $\mathscr{P}_1$ a pour vecteur normal $\vec{AB}\begin{pmatrix}-4\\4\\0\end{pmatrix}$.

   Le plan $\mathscr{P}_2$ a pour vecteur normal $\vec{n}\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$.

   Ces deux vecteurs directeurs ne sont pas colinéaires. (coordonnées non proportionnelles), donc $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$ ne sont pas parallèles, ils sont donc sécants.

   (b) Si $M(x\,;\,y;\,z)$ est commun aux deux plans ses coordonnées vérifient les équations des deux plans, donc le système :
   $\left\{\begin{array}{lcl}x-y-1&=&0\\x-z-2&=&0\end{array}\right.$.
   En posant $z=t$ le système devient :
   $$\left\{\begin{array}{lcl}x-y-1&=&0\\x-z-2&=&0\\z&=&t\end{array}\right.\Rightarrow\left\{\begin{array}{lcl}x-1&=&y\\x&=&z+2\\z&=&t\end{array}\right.$$
   $$\iff\left\{\begin{array}{lcl}x-1&=&y\\x&=&t+2\\z&=&t\end{array}\right.\iff\left\{\begin{array}{l}t+2-1=y\\x=t+2\\z=t\end{array}\right.$$
   $$\iff\left\{\begin{array}{lcl}y&=&t+1\\x&=&t+2\\z&=&t\end{array}\right.,\text{ avec } t\in\mathbb{R}.$$

   Si $\Omega(x\,;\,y\,;\,z)$ est commun à la droite Δ et au plan $\mathscr{P}_3$ ses coordonnées vérifient l'équation du plan et les équations paramétriques de la droite, soit le système :
   $$\left\{\begin{array}{lcl}y&=&t+1\\x&=&t+2\\z&=&t\\y+z-3&=&0\end{array}\right..$$
   En remplaçant x, y, z par leurs expressions en fonction de t dans l'équation du plan on obtient :
   $t+1+t-3=0\iff 2t-2=0\iff 2t=2\iff\boxed{t=1}$.

   On a donc $\boxed{\Omega\,(3\,;\,2\,;\,1)}$.

Si S et T sont deux points distincts de l'espace, on rappelle que l'ensemble des points M de l'espace tels que MS = MT est un plan, appelé plan médiateur du segment [ST]. On admet que les plans $\mathscr{P}_1$, $\mathscr{P}_2$ et $\mathscr{P}_3$ sont les plans médiateurs respectifs des segments [AB], [AC] et [AD].

3. (a) Sans admettre que les plans $\mathscr{P}_1$, $\mathscr{P}_2$ et $\mathscr{P}_3$ sont les plans médiateurs respectifs des segments [AB], [AC] et [AD], on peut calculer :

   $\vec{\Omega A}\begin{pmatrix}2\\-2\\-2\end{pmatrix}$, $\vec{\Omega B}\begin{pmatrix}-2\\-2\\-2\end{pmatrix}$, $\vec{\Omega C}\begin{pmatrix}-2\\-2\\2\end{pmatrix}$, $\vec{\Omega D}\begin{pmatrix}2\\2\\2\end{pmatrix}$.

   On a donc $\Omega\text{A}^2=4+4+4=\boxed{12}$, $\Omega\text{B}^2=\boxed{12}$, $\Omega\text{C}^2=\boxed{12}$, $\Omega\text{D}^2=\boxed{12}$ et par conséquent :
   $\boxed{\Omega\text{A}=\Omega\text{B}=\Omega\text{C}=\Omega\text{D}=\sqrt{12}=\sqrt{4\times3}=2\sqrt{3}}$.

   Sinon : il est clair que Ω est l'intersection des trois points.
   Ω appartient au plan médiateur de $[AB]$ donc $\boxed{\Omega A=\Omega B}$.
   De même, Ω appartient au plan médiateur de $[AC]$ donc $\boxed{\Omega A=\Omega C}$.
   Ω appartient au plan médiateur de $[AD]$ donc $\boxed{\Omega A=\Omega D}$.

   On en déduit : $\boxed{\Omega\text{A}=\Omega\text{B}=\Omega\text{C}=\Omega\text{D}}$.

   (b) Le résultat précédent montre que Ω est équidistant de A, B, C et D donc est le centre de la sphère de rayon $2\sqrt{3}$ contenant A, B, C et D.