Feuille de révisions (2)

I Baccalauréat S Centres étrangers 11 juin 2018 (fonction)

Dans une usine, on se propose de tester un prototype de hotte aspirante pour un local industriel.

Avant de lancer la fabrication en série, on réalise l'expérience suivante : dans un local clos équipé du prototype de hotte aspirante, on diffuse du dioxyde de carbone (CO_2) à débit constant.

Dans ce qui suit, t est le temps exprimé en minute.

À l'instant $t = 0$, la hotte est mise en marche et on la laisse fonctionner pendant 20 minutes. Les mesures réalisées permettent de modéliser le taux (en pourcentage) de CO_2 contenu dans le local au bout de t minutes de fonctionnement de la hotte par l'expression $f(t)$, où f est la fonction définie pour tout réel t de l'intervalle $[0;20]$ par :

$$f(t) = (0,8t+0,2)\mathrm{e}^{-0,5t}+0,03.$$

On donne ci-dessous le tableau de variation de la fonction f sur l'intervalle $[0;20]$.

Ainsi, la valeur $f(0) = 0,23$ traduit le fait que le taux de CO_2 à l'instant 0 est égal à 23 %.

t	0		1,75		20
$f'(t)$		+	0	−	
$f(t)$	0,23	↗		↘	

1. Dans cette question, on arrondira les deux résultats au millième.
   (a) Calculer $f(20)$.
   (b) Déterminer le taux maximal de CO_2 présent dans le local pendant l'expérience.
2. On souhaite que le taux de CO_2 dans le local retrouve une valeur V inférieure ou égale à 3,5 %.
   (a) Justifier qu'il existe un unique instant T satisfaisant cette condition.
   (b) On considère l'algorithme suivant :

```
t ← 1,75
p ← 0,1
V ← 0,7
Tant que V > 0,035
    t ← t + p
    V ← (0,8t + 0,2)e^(−0,5t) + 0,03
Fin Tant que
```

   Quelle est la valeur de la variable t à la fin de l'algorithme ?

   Que représente cette valeur dans le contexte de l'exercice ?
3. On désigne par V_m le taux moyen (en pourcentage) de CO_2 présent dans le local pendant les 11 premières minutes de fonctionnement de la hotte aspirante.
   (a) Soit F la fonction définie sur l'intervalle $[0;11]$ par :

$$F(t) = (-1,6t-3,6)\mathrm{e}^{-0,5t}+0,03t.$$

   Montrer que la fonction F est une primitive de la fonction f sur l'intervalle $[0;11]$.

   (b) En déduire le taux moyen V_m, valeur moyenne de la fonction f sur l'intervalle $[0;11]$.

   On admet que la valeur moyenne de f sur $[0 ; 11]$ est $\dfrac{1}{11-0}\displaystyle\int_0^{11} f(t)\,\mathrm{d}t = \dfrac{1}{11}(F(11)-F(0))$.

   Arrondir le résultat au millième, soit à 0,1 %

II Baccalauréat S Extrait Centres étrangers 11 juin 2018 (probabilités)

Un détaillant en fruits et légumes étudie l'évolution de ses ventes de melons afin de pouvoir anticiper ses commandes.

Le détaillant réalise une étude sur ses clients. Il constate que :

— parmi les clients qui achètent un melon une semaine donnée, 90 % d'entre eux achètent un melon la semaine suivante ;

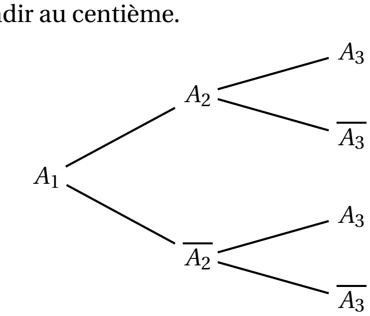
— parmi les clients qui n'achètent pas de melon une semaine donnée, 60 % d'entre eux n'achètent pas de melon la semaine suivante.

On choisit au hasard un client ayant acheté un melon au cours de la semaine 1 et, pour $n \geqslant 1$, on note A_n l'évènement : « le client achète un melon au cours de la semaine n ».

On a ainsi $p(A_1) = 1$.

1. (a) Reproduire et compléter l'arbre de probabilités ci-dessous, relatif aux trois premières semaines.
   (b) Démontrer que $p(A_3) = 0,85$.
   (c) Sachant que le client achète un melon au cours de la semaine 3, quelle est la probabilité qu'il en ait acheté un au cours de la semaine 2 ?

   Arrondir au centième.



   Dans la suite, on pose pour tout entier $n \geqslant 1$: $p_n = P(A_n)$. On a ainsi $p_1 = 1$.
2. Démontrer que, pour tout entier $n \geqslant 1$: $p_{n+1} = 0,5p_n + 0,4$.
3. (a) Démontrer par récurrence que, pour tout entier $n \geqslant 1$: $p_n > 0,8$.
   (b) Démontrer que la suite $\left(p_n\right)$ est décroissante.
   (c) La suite $\left(p_n\right)$ est-elle convergente ?
4. On pose pour tout entier $n \geqslant 1$: $v_n = p_n - 0,8$.
   (a) Démontrer que (v_n) est une suite géométrique dont on donnera le premier terme v_1 et la raison.
   (b) Exprimer v_n en fonction de n.

   En déduire que, pour tout $n \geqslant 1$,

$$p_n = 0,8 + 0,2\times 0,5^{n-1}.$$

   (c) Déterminer la limite de la suite $\left(p_n\right)$.