

# Exercice de révision (1)

## Polynésie septembre 2019

Les parties A et B peuvent être abordées de façon indépendante.

Deux groupes de scientifiques, des spécialistes en environnement et des biologistes, étudient l'évolution d'une population de grenouilles autour d'un étang.

### Partie A - Étude d'un modèle discret d'évolution

Le groupe de spécialistes en environnement étudie le taux de disponibilité des ressources nécessaires pour le développement de la population de grenouilles autour de l'étang. Ce taux dépend notamment du nombre de grenouilles présentes sur les lieux, de la quantité de nourriture à disposition, de l'espace disponible et de la qualité de l'environnement.

Une étude, menée en 2018 par ce premier groupe de scientifiques, a permis d'estimer le taux de disponibilité des ressources à 0,9; cela signifie que 90 % des ressources sont disponibles.

On modélise le taux de disponibilité des ressources par la suite  $(T_n)$  qui, à tout entier naturel  $n$ , associe le taux de disponibilité des ressources  $n$  années après 2018. On a ainsi  $T_0 = 0,9$ .

Le modèle choisi est tel que, pour tout entier naturel  $n$ , on a :  $T_{n+1} = T_n - 0,1T_n^2$ .

1. Certains spécialistes en environnement estiment qu'en 2022, le taux de disponibilité des ressources sera proche de 0,4. Cette affirmation est-elle conforme au modèle? Pourquoi?
2. On définit la fonction  $f$  sur l'intervalle  $[0; 1]$  par  $f(x) = x - 0,1x^2$ .  
Ainsi, la suite  $(T_n)$  vérifie pour tout entier naturel  $n$ ,  $T_{n+1} = f(T_n)$ .
  - (a) Étudier les variations de la fonction  $f$  sur l'intervalle  $[0; 1]$ .
  - (b) Montrer que pour tout  $n$  entier naturel, on a :  $0 \leq T_{n+1} \leq T_n \leq 1$ .
  - (c) La suite  $(T_n)$  est-elle convergente? Justifier la réponse.
  - (d) Le groupe de spécialistes en environnement affirme que, selon ce modèle, le taux de disponibilité des ressources peut être inférieur à 0,4 au cours des vingt premières années qui suivent le début de l'étude et qu'il est capable de déterminer en quelle année, ce seuil serait atteint pour la première fois.

Cette affirmation est-elle conforme au modèle? Pourquoi?

### Partie B - Étude d'un modèle continu d'évolution

Le groupe de biologistes a choisi une autre option et travaille sur le nombre de grenouilles peuplant l'étang. Au 1<sup>er</sup> janvier 2018, il avait été dénombré 250 grenouilles.

Les biologistes estiment que le nombre de grenouilles présentes autour de l'étang peut être modélisé par la fonction  $P$  définie sur l'intervalle  $[0; +\infty[$  par  $P(t) = \frac{1000}{0,4 + 3,6e^{-0,5t}}$  où  $t$  est le temps, mesuré en années, écoulé depuis le 1<sup>er</sup> janvier 2018 (cette fonction découle d'un modèle continu, usuel en biologie, le modèle de Verhulst).

1. Calculer  $P'(t)$  où  $P'$  est la fonction dérivée de  $P$  puis étudier le signe de  $P'(t)$  pour  $t$  appartenant à l'intervalle  $[0; +\infty[$ .
2. Déterminer la limite de la fonction  $P$  en  $+\infty$  puis dresser le tableau de variation de la fonction  $P$  sur l'intervalle  $[0; +\infty[$ .
3. Montrer qu'il existe une unique valeur  $t_0 \in [0; +\infty[$  telle que  $P(t_0) = 2000$ . Déterminer cette valeur à  $10^{-1}$  près.
4. Selon ce modèle, déterminer au cours de quelle année la population de l'étang aura dépassé pour la première fois les 2000 grenouilles.