Exercices de baccalauréat sur les suites

I Antilles-Guyane juin 2018

Le directeur d'une réserve marine a recensé 3 000 cétacés dans cette réserve au 1er juin 2017. Il est inquiet car il sait que le classement de la zone en « réserve marine » ne sera pas reconduit si le nombre de cétacés de cette réserve devient inférieur à 2 000.

Une étude lui permet d'élaborer un modèle selon lequel, chaque année :

— entre le 1er juin et le 31 octobre, 80 cétacés arrivent dans la réserve marine ;

— entre le 1er novembre et le 31 mai, la réserve subit une baisse de 5 % de son effectif par rapport à celui du 31 octobre qui précède.

On modélise l'évolution du nombre de cétacés par une suite (u_n). Selon ce modèle, pour tout entier naturel n, u_n désigne le nombre de cétacés au 1er juin de l'année $2017+n$. On a donc $u_0 = 3000$.

1. Justifier que $u_1 = 2926$.
2. Justifier que, pour tout entier naturel n,
$$u_{n+1} = 0,95u_n + 76.$$
3. À l'aide d'un tableur, on a calculé les 8 premiers termes de la suite (u_n). Le directeur a configuré le format des cellules pour que ne soient affichés que des nombres arrondis à l'unité.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	n	0	1	2	3	4	5	6	7
2	u_n	3 000	2 926	2 856	2 789	2 725	2 665	2 608	2 553

Quelle formule peut-on entrer dans la cellule C2 afin d'obtenir, par recopie vers la droite, les termes de la suite (u_n) ?

4. (a) Démontrer que, pour tout entier naturel n,
$$u_n \geqslant 1520.$$
   (b) Démontrer que la suite (u_n) est décroissante.
   (c) Justifier que la suite (u_n) est convergente. On ne cherchera pas ici la valeur de la limite.
5. On désigne par (v_n) la suite définie par, pour tout entier naturel n, $v_n = u_n - 1520$.
   (a) Démontrer que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison 0,95 dont on précisera le premier terme.
   (b) En déduire que, pour tout entier naturel n,
$$u_n = 1480 \times 0,95^n + 1520.$$
   (c) Déterminer la limite de la suite (u_n).
6. Recopier et compléter l'algorithme suivant pour déterminer l'année à partir de laquelle le nombre de cétacés présents dans la réserve marine sera inférieur à 2 000.

$n \leftarrow 0$
$u \leftarrow 3000$
Tant que . . .
    $n \leftarrow$ . . .
    $u \leftarrow$ . . .
Fin de Tant que

La notation « ← » correspond à une affectation de valeur, ainsi « $n \leftarrow 0$ » signifie « Affecter à n la valeur 0 ».

7. La réserve marine fermera-t-elle un jour ? Si oui, déterminer l'année de la fermeture.

II Sujet 1 année 2021

La suite (u_n) est définie sur $\mathbb{N}$ par $u_0 = 1$ et pour tout entier naturel n,

$$u_{n+1} = \frac{3}{4}u_n + \frac{1}{4}n + 1.$$

1. Calculer, en détaillant les calculs, u_1 et u_2 sous forme de fraction irréductible.

L'extrait, reproduit ci-dessous, d'une feuille de calcul réalisée avec un tableur présente les valeurs des premiers termes de la suite (u_n).

	A	B
1	n	u_n
2	0	1
3	1	1,75
4	2	2,562 5
5	3	3,421 875
6	4	4,316 406 25

1. (a) Quelle formule, étirée ensuite vers le bas, peut-on écrire dans la cellule B3 de la feuille de calcul pour obtenir les termes successifs de (u_n) dans la colonne B ?
   (b) Conjecturer le sens de variation de la suite (u_n).
2. (a) Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a : $n \leqslant u_n \leqslant n+1$.
   (b) En déduire, en justifiant la réponse, le sens de variation et la limite de la suite (u_n).
   (c) Démontrer que :
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{n} = 1.$$
3. On désigne par (v_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $v_n = u_n - n$
   (a) Démontrer que la suite (v_n) est géométrique de raison $\frac{3}{4}$.
   (b) En déduire que, pour tout entier naturel n,on a : $u_n = \left(\frac{3}{4}\right)^n + n$.