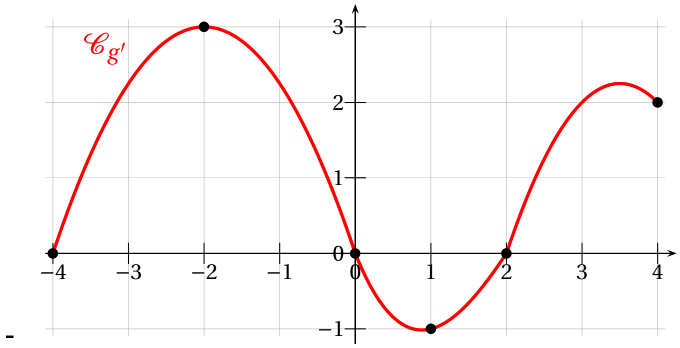
Spécialité mathématiques de Terminale : Contrôle commun (2 heures)

Exercice I

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples. Pour chacune des questions suivantes, une seule des quatre réponses proposées est exacte. Une réponse exacte rapporte un point.
Une réponse fausse, une réponse multiple ou l'absence de réponse à une question ne rapporte ni n'enlève de point. Pour répondre, ***cocher sur le sujet*** *la bonne réponse. Aucune justification n'est demandée.*

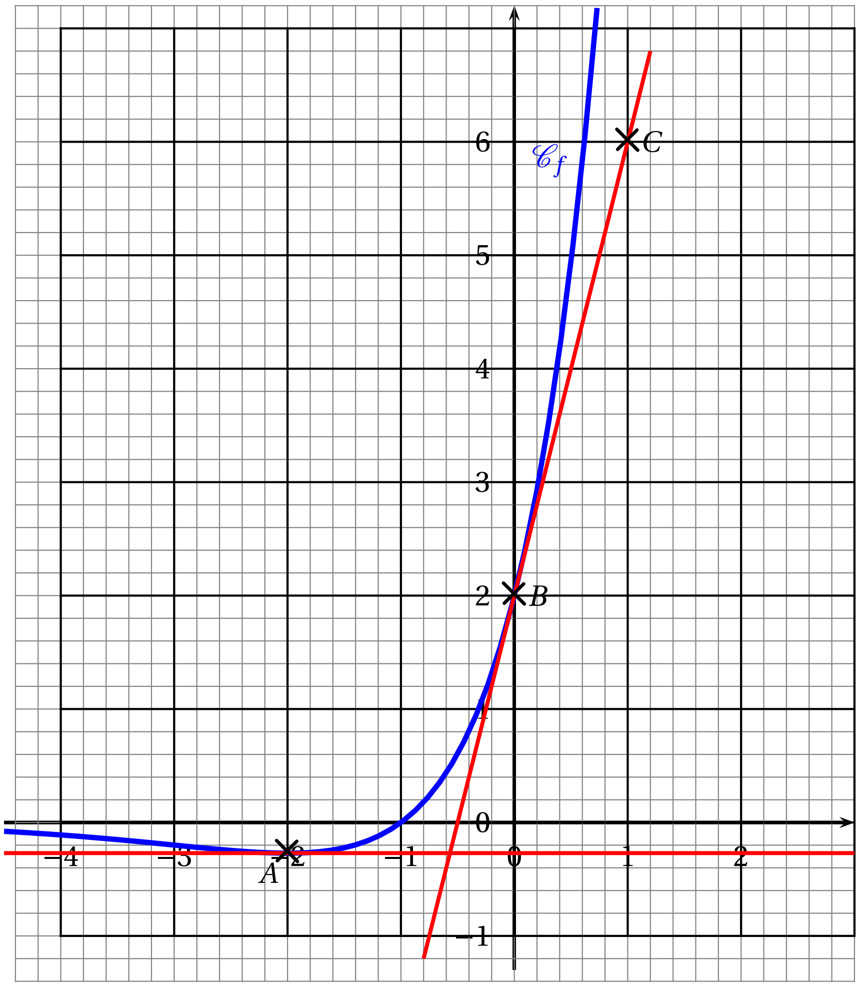
Questions	Réponses
1. On considère les suites (u_n) et (v_n) telles que, pour tout entier naturel n, $$u_n = 1 - \left(\frac{1}{4}\right)^n \quad \text{et} \quad v_n = 1 + \left(\frac{1}{4}\right)^n.$$ On considère de plus une suite (w_n) qui, pour tout entier naturel n, vérifie $u_n \leqslant w_n \leqslant v_n$. On peut affirmer que :	☐ Les suites (u_n) et (v_n) sont géométriques. ☐ La suite (w_n) converge vers 1. ☐ La suite (u_n) est minorée par 1. ☐ La suite (w_n) est croissante.
2. On considère la suite (v_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $v_n = \dfrac{3n}{n+2}$	☐ $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 1$ ☐ $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 3$ ☐ $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \dfrac{3}{2}$ ☐ On ne peut pas déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$
3. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x\mathrm{e}^{2x}$. La fonction dérivée de f est la fonction f' définie sur $\mathbb{R}$ par :	☐ $f'(x) = 2x\mathrm{e}^{2x}$ ☐ $f'(x) = 2\mathrm{e}^{2x}$ ☐ $f'(x) = (2+x)\mathrm{e}^{2x}$ ☐ $f'(x) = (1+2x)\mathrm{e}^{2x}$.
4. Que vaut $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^2-1}{2x^2-2x+1}$?	☐ -1 ☐ 0 ☐ $\dfrac{1}{2}$ ☐ $+\infty$
	suite sur la page suivante...

Questions	Réponses
5. On suppose que g est une fonction dérivable sur l'intervalle $[-4\ ;\ 4]$. On donne ci-contre la représentation graphique de sa fonction dérivée g'.  On peut affirmer que :	☐ g admet un maximum en -2. ☐ g est décroissante sur l'intervalle $[1\,;\,2]$. ☐ $g(0) = 1$ ☐ g admet un minimum en 0.

Exercice II

Partie A : lecture graphique

1. Dans le plan muni d'un repère orthonormé, $\mathscr{C}_f$ est la courbe représentative d'une fonction f, définie et dérivable sur l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels. Dans la figure ci-dessous, on a tracé la courbe $\mathscr{C}_f$.
   Les points A et B sont les points de $\mathscr{C}_f$ d'abscisses respectives -2 et 0, et on a tracé les tangentes à $\mathscr{C}_f$ en ces points.
   On suppose que la tangente en A est parallèle à l'axe des abscisses et que la tangente en B passe par le point $C(1\ ;\ 6)$. On note f' la fonction dérivée de f.
   Lire graphiquement les valeurs de $f'(-2)$ et $f'(0)$. Justifier brièvement.



Partie B : Calcul algébrique

La fonction représentée sur le graphique précédent est la fonction f définie sur l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels par : $f(x) = \mathrm{e}^x(2x+2)$.
On admet que f est dérivable sur $\mathbb{R}$.

2. Montrer que pour tout nombre réel x, $f'(x) = \mathrm{e}^x(2x+4)$.
3. Étudier le signe de f' sur $\mathbb{R}$, puis en déduire le tableau de variation de f sur $\mathbb{R}$.
4. Déterminer par le calcul, l'équation réduite de la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 0.
5. Justifier par le calcul les deux résultats suivants admis au début de l'exercice :
   — La tangente en A est parallèle à l'axe des abscisses.
   — La tangente en B passe par le point $C(1\ ;\ 6)$.

Exercice III

On s'intéresse à la gestion des déchets ménagers au sein d'une grande agglomération.

Grâce au développement du recyclage, les experts estiment que la quantité de déchets de l'agglomération à incinérer devrait diminuer de 5 % par an. Par ailleurs, suite à la signature d'un contrat, cette agglomération s'engage à partir du 1er janvier 2020 à collecter et incinérer 12 000 tonnes de déchets supplémentaires par an provenant d'une commune voisine.

Durant l'année 2019, l'agglomération a incinéré 300 000 tonnes de déchets.

On admet que la situation peut être modélisée par une suite (u_n) dont le terme général u_n donne, pour tout entier naturel n, une estimation de la quantité (exprimée en millier de tonnes) de déchets incinérés durant l'année $2019+n$. On a ainsi $u_0 = 300$.

Partie A

1. (a) Déterminer u_1.

   (b) Justifier, pour tout entier naturel n, que $u_{n+1} = 0,95u_n + 12$.

2. (a) Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $200 \leq u_{n+1} \leq u_n$.

   (b) La suite (u_n) est-elle convergente ? Justifier.

3. On considère la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par $v_n = u_n - 240$.

   (a) Montrer que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison 0,95 dont on précisera le premier terme v_0.

   (b) Exprimer v_n en fonction de n pour tout entier naturel n.

   (c) En déduire, pour tout entier naturel n, que $u_n = 60 \times 0,95^n + 240$.

4. Déterminer la limite de la suite (u_n) et interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.

Partie B

L'agglomération s'est fixé l'objectif d'une diminution de la quantité de déchets incinérés de 15 % d'ici 2039 par rapport à 2019.

1. Justifier que cet objectif ne sera pas atteint si la diminution des déchets suit les prévisions des experts.

2. (a) Recopier et compléter le programme écrit ci-dessous en Python afin qu'il affiche, après exécution, l'année à partir de laquelle la quantité de déchets incinérés aura diminué de 15 % par rapport à 2019.

```
def seuil() :
    N = 2019
    U = 300
    while U ... :
        N = N + 1
        U = ...
    return N
```

   (b) En quelle année l'objectif sera-t-il atteint ?