Contrôle sur les suites et limites de suites

I

Soit (u_n) une suite. Donner la définition de $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

II

Calculer les limites suivantes : (en justifiant)

a) $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(n^2+1\right)$

b) $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n+1}$

c) $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(n^2-2n\right)$

d) $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{2n+3}{3n+2}\right)$

e) $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{5n+1}{3n^2+1}\right)$

f) $\lim\limits_{n\to+\infty} 3\times\dfrac{1-\left(\frac{1}{4}\right)^n}{1-\frac{1}{4}}$

III VRAI OU FAUX

Dire si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses et justifier, par exemple à l'aide d'un contre-exemple dans le cas ou l'affirmation est fausse.

1. Toute suite décroisante est majorée.
2. Soit (u_n) une suite convergente.
   Si, à partir d'un certain rang, tous les termes de la suite (u_n) sont strictement positifs, alors la limite de la suite (u_n) est aussi strictement positive.
3. On suppose que, pout tout $n\in\mathbb{N}^*$,
   $$-1-\frac{1}{n}\leqslant u_n\leqslant 1+\frac{1}{n}.$$
   Alors la suite (u_n) converge.
4. Toute suite bornée est convergente.
5. Une suite croissante a tous ses termes strictement positifs à partir d'un certain rang.
6. Si une suite est croissante et majorée par un nombre réel ℓ, alors elle converge vers ℓ.
7. Si une suite est monotone et bornée, alors elle converge.

IV

On considère la suite (u_n) définie par $u_0=1$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1}=\dfrac{1}{3}u_n+2$.

1. Démontrer, en utilisant un raisonnement par récurrence, que (u_n) est majorée par 3.
2. Soit (v_n) la suite définie, pour tout $n\in\mathbb{N}$, par
   $$v_n=u_n-3.$$
   (a) Montrer que la suite (v_n) est géométrique. Préciser sa raison et son premier terme.
   (b) En déduire l'expression explicite de v_n en fonction de n puis celle de u_n.
   (c) En déduire la limite de v_n quand n tend vers $+\infty$. (Justifier!)

V

La suite (u_n) est définie par $u_n=\dfrac{n+(-1)^n}{n+1}$.

1. Démontrer que, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $\dfrac{n-1}{n+1}\leqslant u_n\leqslant 1$.
2. En déduire, en justifiant, la limite de (u_n) quand n tend vers $+\infty$.

VI

Pour chacune des fonctions f suivantes, calculer l'expression de $f'(x)$ où f' est la fonction dérivée de f.

(a) $f(x)=\dfrac{3x+5}{7x-2}$ sur $\mathscr{D}=\mathbb{R}\setminus\left\{\dfrac{2}{7}\right\}$.

(b) $f(x)=(3x+5)\sqrt{x}$ sur $\mathscr{D}=]0\,;\,+\infty[$

(c) $f(x)=3x^2+5x+1+2\sqrt{x}$ sur $\mathscr{D}=]0\,;\,+\infty[$.

VII

On considère les fonctions $f: x\longmapsto (x+1)\sqrt{x}$ et $g: x\longmapsto x^3+\dfrac{1}{x}$ sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.

1. Montrer que le point $C(1\,;\,2)$ appartient aux deux courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ représentatives de f et de g.
2. Les courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ ont-elles la même tangente au point $C(1\,;\,2)$?