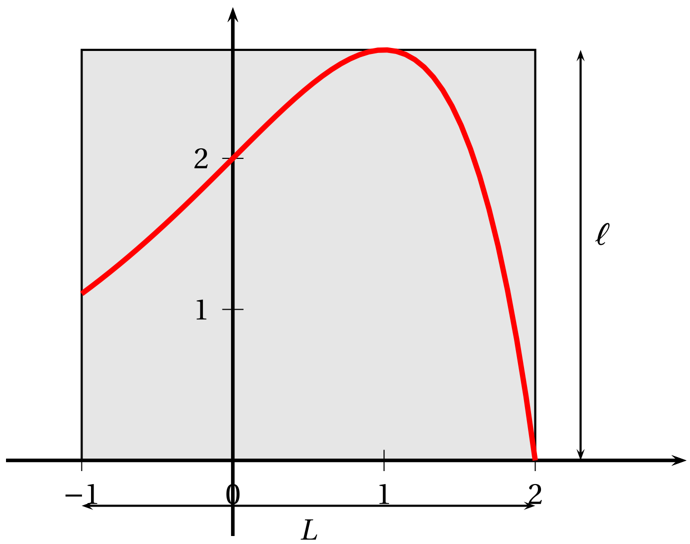
Exercices sur la fonction exponentielle (2)

I

Une entreprise de menuiserie réalise des découpes dans des plaques rectangulaires de bois.
Dans un repère orthonormé d'unité 30 cm ci-dessous, on modélise la forme de la découpe dans la plaque rectangulaire par la courbe $\mathscr{C}_f$ représentative de la fonction f définie sur l'intervalle [-1 ; 2] par :

$$f(x) = (-x+2)\mathrm{e}^x.$$



Le bord supérieur de la plaque rectangulaire est tangent à la courbe $\mathscr{C}_f$. On nomme L la longueur de la plaque rectangulaire et ℓ sa largeur.
On note f' la fonction dérivée de f .

1. Montrer que pour tout réel x de l'intervalle [- 1 ; 2], $f'(x) = (-x+1)\mathrm{e}^x$.
2. En déduire le tableau de variations de la fonction f sur [-1 ; 2].
3. La longueur L de la plaque rectangulaire est de 90 cm. Trouver sa largeur ℓ exacte en centimètres.

II

Soit la fonction g, définie sur tous les réels par $g(x) = 1 - x + \mathrm{e}^x$.

1. Déterminer les variations de g.
2. Déterminer l'extremum local de g, en déduire le signe de $g(x)$.
   On définit maintenant la fonction f sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x + 1 + \dfrac{x}{\mathrm{e}^x}$.
3. Démontrer que pour tout réel x, on a : $f'(x) = \mathrm{e}^{-x} g(x)$.
4. Déduire de la question 4 les variations de f.
5. Donner l'équation de la tangente à $\mathscr{C}$ (courbe représentative de f dans un repère orthonormé) au point d'abscisse 0. On note $\mathscr{T}$ cette tangente dans le repère.
6. Étudier la position relative de $\mathscr{C}$ et $\mathscr{T}$.