Exercices sur la fonction exponentielle

I

Simplifier l'expression $\dfrac{\left(\mathrm{e}^{-3x}\right)^2 \mathrm{e}^{5x}}{\mathrm{e}^{-x}}$.

II

1. Déterminer une expression de la dérivée de la fonction $g : x \mapsto \dfrac{\mathrm{e}^x}{2x-3}$, définie et dérivable sur $\mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus \left\{\dfrac{3}{2}\right\}$.
2. Donner le tableau de signes de cette dérivée.
3. En déduire le tableau de variations de g

III

On considère la fonction $f : x \mapsto \mathrm{e}^x - x$.

1. Calculer $f'(x)$.
2. En déduire les variations de f.
3. En déduire que $\mathrm{e}^x > x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
4. En déduire $\lim\limits_{x \to +\infty} \mathrm{e}^x$.

IV

Résoudre les équation et inéquations suivantes :

1. $\mathrm{e}^x > \mathrm{e}$
2. $\mathrm{e}^{x^2-x} = \mathrm{e}^{x+3}$
3. $\mathrm{e}^{x^2} = \mathrm{e}^{-5}$
4. $\mathrm{e}^{4x-2} \geqslant \dfrac{1}{\mathrm{e}}$
5. $\mathrm{e}^{x^2+x-6} < 1$
6. $\mathrm{e}^{2x} + 2\mathrm{e}^x - 3 = 0$ (on pourra poser $X = \mathrm{e}^x$).

V Utilisation d'une fonction auxiliaire

1. On définit sur $\mathbb{R}$ la fonction $g : x \mapsto x^2\mathrm{e}^x - 1$.

   (a) Déterminer une expression de la dérivée de g.

   (b) Donner le tableau de signes de cette dérivée sur $\mathbb{R}$.

   (c) En déduire le tableau de variations de g sur $\mathbb{R}$.

   (d) Donner, à l'aide d'un tableau de valeurs, une valeur approchée à 0,1 près de la solution de l'équation $g(x) = 0$.

   (e) En déduire le tableau de signes de g(x) sur $\mathbb{R}$.

2. On considère la fonction $f : x \mapsto \mathrm{e}^x + \dfrac{1}{x}$, définie et dérivable sur $\mathbb{R}^*$.

   (a) Expliquer pourquoi la fonction f n'est pas définie en 0.

   (b) Déterminer une expression de la dérivée de f.

   (c) Donner le tableau de signes de cette dérivée sur $\mathbb{R}^*$.

   (d) En déduire le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}^*$.