Correction de la feuille de révisions n° 2

I Centres étrangers juin 2018

Dans une usine, on se propose de tester un prototype de hotte aspirante pour un local industriel.

Avant de lancer la fabrication en série, on réalise l'expérience suivante : dans un local clos équipé du prototype de hotte aspirante, on diffuse du dioxyde de carbone (CO_2) à débit constant.

Dans ce qui suit, t est le temps exprimé en minute.

À l'instant $t = 0$, la hotte est mise en marche et on la laisse fonctionner pendant 20 minutes. Les mesures réalisées permettent de modéliser le taux (en pourcentage) de CO_2 contenu dans le local au bout de t minutes de fonctionnement de la hotte par l'expression $f(t)$, où f est la fonction définie pour tout réel t de l'intervalle $[0\,;20]$ par :

$$f(t) = (0,8t + 0,2)\mathrm{e}^{-0,5t} + 0,03.$$

On donne ci-contre le tableau de variation de la fonction f sur l'intervalle $[0\,;20]$.

Ainsi, la valeur $f(0) = 0,23$ traduit le fait que le taux de CO_2 à l'instant 0 est égal à 23 %.

x	0		1,75		20
$f'(t)$		$+$	0	$-$	
$f(t)$	0,23	↗		↘	

1. Dans cette question, on arrondira les deux résultats au millième.
   (a) $f(20) = 16,2\mathrm{e}^{-10} + 0,02 \approx \boxed{0,0307}$.
   (b) Le taux maximal de CO_2 présent dans le local durant l'expérience est $f(1,75) \approx 0,697$.
   Ce taux ùaxiùal est d'environ 69,7 %.
2. On souhaite que le taux de CO_2 dans le local retrouve une valeur V inférieure ou égale à 3,5 %.
   (a) Sur $[1,75\ ;\ 20]$:
   - f est continue (somme, produit et composée de fonctions continues)
   - $f(1,75) \approx 0,687 > 0,035$
   - $f(20) \approx 0,0307 < 0,035$

   D'après le **théorème des valeurs intermédiaires**, l'équation $f(x) = 0,035$ a une solution dans l'intervalle $[0\ ;\ 20$; sur cet intervalle, f est monotone (décroissante) donc cette solution est **unique**. On la note T.

   (b) On considère l'algorithme suivant :

$t \leftarrow 1,75$
$p \leftarrow 0,1$
$V \leftarrow 0,7$
Tant que $V > 0,035$
    $t \leftarrow t + p$
    $V \leftarrow (0,8t + 0,2)\mathrm{e}^{-0,5t} + 0,03$
Fin Tant que

On fait un tableau de valeurs sur la calculatrice.

On trouve $f(15,65) \approx 0,03508$ et $f(15,75) \approx 0,0349$ donc l'algorithme affiche $\boxed{t = 15,75}$.

Il faut attendre 15 min 45 s pour retrouver un taux de CO_2 inférieur à 3,5 %.

Cette valeur est la plus petite valeur s'exprimant sous la forme $t = 1,75 + 0,1n$ pour laquelle $f(t) < 0,035$

3. On désigne par V_m le taux moyen (en pourcentage) de CO_2 présent dans le local pendant les Il premières minutes de fonctionnement de la hotte aspirante.

   (a) Soit F la fonction définie sur l'intervalle $[0\,;\,11]$ par :

$$F(t) = (-1,6t - 3,6)\mathrm{e}^{-0,5t} + 0,03t.$$

   $F'(t) = -1,6\mathrm{e}^{-0,5t} - 0,5(-1,6t - 3,6)\mathrm{e}^{-0,5t} + 0,03 = (-1,6 - 0,8t + 1,8) + 0,03$
   $= \boxed{(0,8t + 0,02)\mathrm{e}^{-0,5t} + 0,03 = f(t)}$.

   $F' = f$ donc F est une **primitive** de f.

   (b) La valeur moyenne de f sur $[0\,;\,11]$ est $\dfrac{1}{11-0}\displaystyle\int_0^{11} f(t)\,\mathrm{d}t = \dfrac{1}{11}(F(11) - F(0)) \approx \boxed{0,349}$.

   Le taux moyen de CO_2 sur l'intervalle $[0\,;\,11]$ est d'environ $\boxed{34,9\ \%}$.

II

Le détaillant réalise une étude sur ses clients. Il constate que :

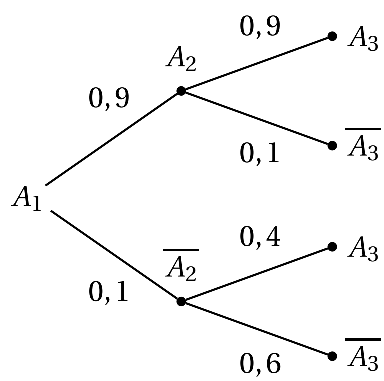
— parmi les clients qui achètent un melon une semaine donnée, 90 % d'entre eux achètent un melon la semaine suivante;

— parmi les clients qui n'achètent pas de melon une semaine donnée, 60 % d'entre eux n'achètent pas de melon la semaine suivante.

On choisit au hasard un client ayant acheté un melon au cours de la semaine 1 et, pour $n \geqslant 1$, on note A_n l'évènement : « le client achète un melon au cours de la semaine n ».

On a ainsi $p(A_1) = 1$.

1. (a) Arbre complété :



   (b) D'après la formule des probabilités totales :

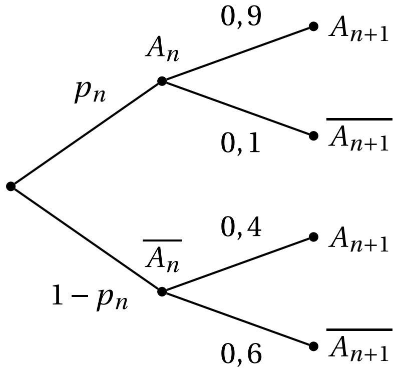
   $p(A_3) = p_{A_2}(A_3) \times p(A_3) + p_{\overline{A_2}}(A_3) \times p\left(\overline{A_2}\right) = 0,9 \times 0,9 + 0,4 \times 0,1 : 0,81 + 0,04 = 0,85 : \boxed{p(A_3) = 0,85}$

   (c) $p_{A_3}(A_2) = \dfrac{p(A_2 \cap A_3)}{p(A_3)} = \boxed{\dfrac{0,81}{0,85} \approx 0,95}$.

Sachant que le client achète un melon au cours de la semaine 3, la probabilité qu'il en ait acheté un au cours de la semaine 2 est d'environ 0,95.

Dans la suite, on pose pour tout entier $n \geqslant 1$: $p_n = P(A_n)$. On a ainsi $p_1 = 1$.

2. On peut représenter la situation par un arbre :



On en déduit que :
$p_{n+1} = 0,9p_n + 0,4(1 - p_n) = 0,5p_n + 0,4$ donc $\boxed{p_{n+1} = 0,5p_n + 0,4}$

3. (a) Démontrons par récurrence que, pour tout entier $n \geqslant 1$: $p_n > 0,8$:
   - **Initialisation** : $p_1 = 1 > 0,8$ donc la propriété est vraie au rang 1.
   - **Hérédité** : supposons la propriété vraie au rang n donc $p_n > 0,8$.
     Alors : $p_n > 0,8 \Rightarrow 0,5p_n > 0,5 \times 0,8 = 0,4 \Rightarrow 0,5p_n + 0,4 > 0,4 + 0,4 = 0,8$ donc $p_{n+1} > 0,8$.
     La propriété est donc héréditaire.

   D'après l'axiome de récurrence, la propriété est vraie pour tout $n \geqslant 1$.

   (b) Pour tout $n \geqslant 1$, $p_{n+1} - p_n = 0,5p_n + 0,4 - p_n = -0,5p_n + 0,4 = -0,5(p_n - 0,8) < 0$ car d'après la question précédente, $p_n > 0,8$.

   (c) La suite (p_n) est décroissante et minorée, donc **convergente** vers un réel $\ell \geqslant 0,8$.

4. On pose pour tout entier $n \geqslant 1$: $v_n = p_n - 0,8$.

   (a) Pour tout $n \geqslant 1$, $v_{n+1} = p_{n+1} - 0,8 : 0,5p_n + 0,4 - 0,8 = 0,5p_n - 0,4 = 0,5(p_n - 0,8) = 0,5v_n$ donc la suite (v_n) est géométrique de raison $\boxed{q = 0,5}$ et de premier term $v_1 = p_1 - 0,8 = \boxed{0,2}$.

   (b) Puisque (v_n) est géométrique de raison 0,5, on a, pour tout $n \geqslant 1$: $v_n = v_1 q^{n-1} = 0,2 \times 0,5^{n-1}$ donc $\boxed{v_n = 0,2 \times 0,5^{n-1}}$.

   On en déduit que, pour tout $n \geqslant 1$, $p_n = v_n + 0,8 = 0,2 \times 0,5^{n-1} + 0,8$ donc $\boxed{p_n = 0,8 + 0,2 \times 0,5^{n-1}}$.

   (c) Comme $-1 < 0,5 < 1$, $\lim\limits_{n \to +\infty} 0,5^{n-1} = 0$ donc $\boxed{\lim\limits_{n \to +\infty} p_n = 0,8}$