# Correction des exercices sur la fonction exponentielle

## I

$$\frac{\left(\mathrm{e}^{-3x}\right)^2\mathrm{e}^{5x}}{\mathrm{e}^{-x}}=\frac{\mathrm{e}^{-6x}\mathrm{e}^{5x}}{\mathrm{e}^{-x}}=\mathrm{e}^{-6x+5x+x}=\mathrm{e}^0=\boxed{1}.$$

## II

1. Soit $g : x \mapsto \dfrac{\mathrm{e}^x}{2x-3}$.
   On dérive $g$ comme un quotient.
   $g'(x)=\dfrac{\mathrm{e}^x(2x-3)-2\mathrm{e}^x}{(2x-3)^2}=\dfrac{\mathrm{e}^x(2x-3-2)}{(2x-3)^2}=\boxed{\dfrac{(2x-5)\mathrm{e}^x}{(2x-3)^2}}$
2. $\mathrm{e}^x>0$ et $(2x-3)^2>0$ sur $\mathscr{D}$ donc $f'(x)$ est du signe de $2x-5$, donc positif pour $x>\dfrac{5}{2}$
3. Tableau de variation de $g$

| $x$ | $-\infty$ | | $\frac{3}{2}$ | | $\frac{5}{2}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | $\Vert$ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f(x)$ | | $\searrow$ | $\Vert$ | $\searrow$ | $\dfrac{\mathrm{e}^{\frac{5}{2}}}{2}$ | $\nearrow$ | |

## III

On considère la fonction $f : x \mapsto \mathrm{e}^x - x$ .

1. $\boxed{f'(x)=\mathrm{e}^x-1}$
2. $f'(x)>0 \Leftrightarrow \mathrm{e}^x>1 \Leftrightarrow x>0$ donc $f$ est croissante sur $[0\ ;\ =\infty[$ et décràissante sur $]-\infty\ ;\ 0]$

| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f(x)$ | | $\searrow$ | $1$ | $\nearrow$ | |

3. On en déduit que, pour tout $x$, $f(x)\geqslant 1$ donc $f(x)>0$ d'où $\mathrm{e}^x-x>0$ qui équivaut à $\mathrm{e}^x>x$.
4. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x=+\infty$, donc, par comparaison, $\boxed{\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\mathrm{e}^x=+\infty}$

## IV

1. $\mathrm{e}^x>\mathrm{e} \Leftrightarrow \mathrm{e}^x>\mathrm{e}^1 \Leftrightarrow x>1$, donc $\boxed{\mathscr{S}=]1\ ;\ +\infty[}$.
2. $\mathrm{e}^{x^2-x}=\mathrm{e}^{x+3} \Leftrightarrow x^2-x=x+3 \Leftrightarrow x^2-2x-3=0.$
   $\Delta=16>0$. Il y a deux solutions : $\boxed{\mathscr{S}=\{-1\ ;\ 3\}}$.

3. $e^{x^2} = e^{-5} \Leftrightarrow x^2 = -5$ qui n'a pas de solution dans $\mathbb{R}$ car $x^2 \geqslant 0$ : $\boxed{\mathscr{S} = \emptyset}$.

4. $e^{4x-2} \geqslant \dfrac{1}{e} \Leftrightarrow e^{4x-2} \geqslant e^{-1} \Leftrightarrow 4x - 2 \geqslant -1 \Leftrightarrow 4x \geqslant 1 \Leftrightarrow x \geqslant \dfrac{1}{4}$ ; $\boxed{\mathscr{S} = \left[\dfrac{1}{4}\ ;\ +\infty\right[}$

5. $e^{x^2+x-6} < 1 \Leftrightarrow e^{x^2+x-6} < e^0 \Leftrightarrow x^2 + x - 6 > 0$.
   $\Delta = 25 > 0$ ; deux racines : $x_1 = -3$ et $x_2 = 2$.
   On en déduit $\boxed{\mathscr{S} = ]-\infty\ ;\ -3] \cup [2\ ;\ +\infty[}$

6. $e^{2x} + 2e^x - 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} X - e^x \\ X^2 + 2X - 3 = 0 \end{cases}$.
   On trouve $X_1 = 1$ et $X_2 = -3$.
   On résout alors :

   - $e^x = X_1 = 1$ ; on trouve $x = 0$
   - $e^x = X_2 = -3$ qui n'a pas de solution car $e^x > 0$.

   On en déduit : ||

# V Utilisation d'une fonction auxiliaire

1. On définit sur $\mathbb{R}$ la fonction $g : x \mapsto x^2 e^x - 1$.

   (a) On a : $g'(x) = 2xe^x + x^2 \times e^x - 0 = \left(x^2 + 2x\right)e^x = \boxed{x(x+2)e^x}$.

   (b) $g'(x)$ est du signe de $x(x+2)$ qui s'annule en -2 et 0, et est positif à l'extérieur de l'intervalle formé par les racines.
   Tableau de signes de $g'(x)$

| $x$ | $-\infty$ | | $-2$ | | $0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $g'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |

   (c) Tableau de variations de $g$ sur $\mathbb{R}$ :

| $x$ | $-\infty$ | | $-2$ | | $0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $g'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $g(x)$ | | ↗ | $4e^{-2} - 1$ | ↘ | $-1$ | ↗ | |

   (d) $g(x) = 0$ a une seule solution $\alpha$, d'après le tableau de variation ; on trouve, à la calculatrice : $\boxed{\alpha \approx 0,7}$.

   (e) On en déduit :

| $x$ | $-\infty$ | | $\alpha$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $g(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |

2. On considère la fonction $f : x \mapsto e^x + \dfrac{1}{x}$, définie et dérivable sur $\mathbb{R}^*$.

   (a) $f$ n'est pas définie en 0 car $\dfrac{1}{x}$ n'st pas défini en 0.

(b) $f'(x) = \mathrm{e}^x - \dfrac{1}{x^2} = \dfrac{x^2\mathrm{e}^x - 1}{x^2} = \boxed{\dfrac{g(x)}{x^2}}$.

(c) voir question suivante

(d) Tableau de variation. (et de signe de $g'$) :

| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $\alpha$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $g'(x)$ | | $-$ | \|\| | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $g(x)$ | | $\searrow$ | \|\| | $\searrow$ | $\mathrm{e}^{\alpha} + \dfrac{1}{\alpha}$ | $\nearrow$ | |