Correction

Polynésie septembre 2019

Partie A - Étude d'un modèle discret d'évolution

1. On a :
   - $T_0 = \boxed{0,9}$
   - $T_1 = T_0 - 0,T_0^2 = 0,9 - 0,1 \times 0,81 = 0,9 - 0,081 = \boxed{0,819}$;
   - $T_2 = T_1 - 0,1 \times T_1^2 = 0{,}751\,924 \approx \boxed{0,752}$;
   - $T_3 = T_2 - 0,1 \times T_2^2 \approx \boxed{0,695}$ et enfin
   - $T_4 = T_3 - 0,1 \times T_3^2 \approx \boxed{0,647}$.

   Donc l'estimation de 0,4 est loin du modèle.
2. (a) La fonction polynôme f est dérivable sur $[0;1]$ et sur cet intervalle :
   $f'(x) = 1 - 2 \times 0,1x = 1 - 0,2x$.
   Or $0 \leqslant x \leqslant 1 \Rightarrow 0 \leqslant 0,2x \leqslant 0,2 \Rightarrow -0,2 \leqslant -0,2x \leqslant 0 \Rightarrow 0,8 \leqslant 1 - 0,2x \leqslant 1$, ce qui montre que $f'(x) > 0$ sur $[0;1]$: la fonction f est donc **croissante** sur $[0;1]$ de $f(0) = 0$ à $f(1) = 1 - 0,1 = 0,9$.

   (b) Montrons, par récurrence, que pour tout n entier naturel, on a : $0 \leqslant T_{n+1} \leqslant T_n \leqslant 1$.
   - *Initialisation* : on a vu que $0 < 0,819 < 0,9 < 1$ ou $0 < T_1 < T_0 < 1$: l'encadrement est vrai au rang 0;
   - *Hérédité* supposons que pour $n \in \mathbb{N}$, on ait :
     $0 < T_{n+1} < T_n < 1$. par croissance de la fonction f on a :
     $f(0) < f(T_{n+1}) < f(T_n) < f(1)$ ou $0 < T_{n+2} < T_{n+1} < 0,9$.
     On a donc $0 < T_{n+2} < T_{n+1} < 1$: l'encadrement est vrai au rang $n+1$.

   L'encadrement est vrai au rang 0, et s'il est vrai à un rang n quelconque il est vrai au rang $n+1$: d'après le principe de récurrence, quel que soit le naturel n, $0 \leqslant T_{n+1} \leqslant T_n \leqslant 1$.

   (c) La suite (T_n) est **décroissante et minorée** par 0, elle est donc **convergente** vers une limite $\ell \geqslant 0$.

   (d) La calculatrice donne $T_{14} \approx 0,385$: les spécialistes ont donc raison. $T_{20} \approx 0,31$

Partie B - Étude d'un modèle continu d'évolution

1. Sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$, la fonction P quotient de fonctions dérivables et de dénominateur strictement positif, est dérivable et sur cet intervalle :
   $$P'(t) = -\frac{-0,5 \times 3,6\mathrm{e}^{-0,5t} \times 1\,000}{\left(0,4 + 3,6\mathrm{e}^{-0,5t}\right)^2} = \boxed{\frac{1\,800\mathrm{e}^{-0,5t}}{\left(0,4 + 3,6\mathrm{e}^{-0,5t}\right)^2}}.$$
2. On sait que $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} \mathrm{e}^{-0,5t} = 0$, donc $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} 0,4 + 3,6\mathrm{e}^{-0,5t} = 0,4$ et enfin $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} \frac{1\,000}{0,4} = \boxed{2\,500}$.
   $P'(t)$ est un quotient de nombres supérieurs à zéro, on a donc $P'(t) > 0$ sur $[0\,;\,+\infty[$.
   La fonction P est donc **croissante** sur $[0\,;\,+\infty[$ de $P(0) = \dfrac{1\,000}{0,4 + 3,6} = \dfrac{1\,000}{4} = 250$ à $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} P(t) = 2\,500$.
   La fonction P est strictement croissante, continue car dérivable sur $[0\,;\,+\infty[$ de 250 à 2 500
3. D'après le résultat précédent comme $250 < 2\,000 < 2\,500$, il existe un réél unique $t_0 \in [0\,;\,+\infty[$ tel que $P(t_0) = 2\,000$ (d'après le **théorème des valeurs intermédiaires**).
   La calculatrice donne : $P(7) \approx 1\,965$ et $P(8) \approx 2\,146$, donc $7 < t_0 < 8$; puis
   $P(7,1) \approx 1987$ et $P(7,2) \approx 2\,007$, donc $\boxed{7,1 < t_0 < 7,2}$.
4. On a trouvé à la question précédente qu'au bout d'un temps t_0 compris entre 7,1 et 7,2 années la population aura atteint les 2 000 individus, donc durant l'année 2026.