Correction du contrôle commun de Spécialité mathématiques de Terminale

Exercice I

1. $u_n = 1 - \left(\dfrac{1}{4}\right)^n$ et $v_n = 1 + \left(\dfrac{1}{4}\right)^n$.
   On considère de plus une suite (w_n) qui, pour tout entier naturel n, vérifie $u_n \leqslant w_n \leqslant v_n$.
   $-1 < \dfrac{1}{4} < 1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{1}{4}\right)^n = 0$.
   D'après le théorème des gendarmes, $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} w_n = 1}$.

2. (v_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $v_n = \dfrac{3n}{n+2}$.
   Pour $n \neq 0$, $v_n = \dfrac{3n}{n\left(1+\frac{2}{n}\right)} = \dfrac{3}{1+\frac{2}{n}}$.
   $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{2}{n} = 0$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(1+\dfrac{2}{n}\right) = 1$ d'où $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 3}$.

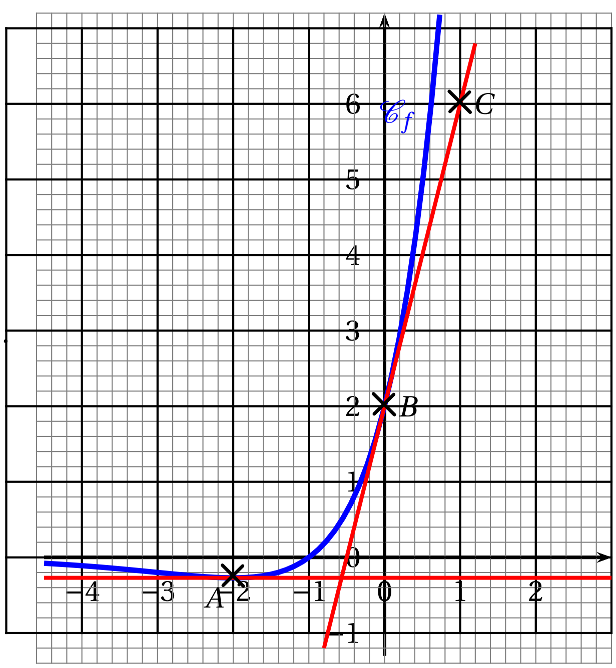
3. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x\mathrm{e}^{2x}$. La dérivée de $x \mapsto \mathrm{e}^{ax+b}$ est $x \mapsto a\mathrm{e}^{ax+b}$ (cours de Première) ou la dérivée de $v\mathrm{e}^v$ est $v'\mathrm{e}^v$ où v est une fonction dérivable.
   On en déduit que : $f'(x) = 1\mathrm{e}^{2x} + x \times 2\mathrm{e}^{2x} = \boxed{(1+2x)\mathrm{e}^{2x}}$.

4. Pour $x \neq 0$, $\dfrac{x^2-1}{2x^2-2x+1} = \dfrac{x^2\left(1-\frac{1}{x^2}\right)}{x^2\left(2-\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}\right)} = \dfrac{1-\frac{1}{x^2}}{2-\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}}$.
   $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(1-\dfrac{1}{X^2}\right) = 1$ ET $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(2-\dfrac{2}{x}+\dfrac{1}{x^2}\right) = 2$, donc, par quotient, $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^2-1}{2x^2-2x+1} = \dfrac{1}{2}}$

5. $g' \leqslant 0$ sur $[1~;~2]$ donc g est décroissante sur $[1~;~2]$.

Exercice II

Partie A : lecture graphique

1. 

- $f'(-2) = 0$ (tangente parallèle à l'axe des abscisses)
- $f'(0)$ est le coefficient directeur de la droite (BC) ; $f'(0) = \dfrac{y_C - y_B}{x_C - x_B} = \dfrac{6-2}{1-0} = 4$ donc $\boxed{f'(0) = 4}$

Partie B : Calcul algébrique

La fonction représentée sur le graphique précédent est la fonction f définie sur l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels par : $f(x) = \mathrm{e}^{x}(2x+2)$.
On admet que f est dérivable sur $\mathbb{R}$.

2. $f = uv$ avec $\begin{cases} u(x) = \mathrm{e}^{x} \\ v(x) = 2x+2 \end{cases}$.

   $f' = u'v + uv'$ avec $\begin{cases} u'(x) = \mathrm{e}^{x} \\ v'(x)2 \end{cases}$.

   Aklors : $f'(x) = \mathrm{e}^{x}(2x+5) + 2\mathrm{e}^{x} = (2x+2+2)\mathrm{e}^{x} = \boxed{(2x+4)\mathrm{e}^{x}}$.
3. Pour tout x, $\mathrm{e}^{x} > 0$ donc $f'(x)$ est du signe de $2x+4 = 2(x+2)$, qui s'annule en -2 et est positif pour $x \geqslant -2$.
   On en déduit le tableau de variation de f :

x	$-\infty$		-2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\searrow$	$-2\mathrm{e}^{-2}$	$\nearrow$	

4. Tangente au point d'abscisse 0 :
   $f'(0) = 4$ et $f(0) = 2$; la tangente a donc pour équation $y = f'(0)(x-0) + f(0)$ donc $y = 4x+2$
5. — En remplaçant x par -2, on a $f'(-2) = 0$, donc la tangente en 2 est bien parallèle à l'axe des abscisses.
   — L'équation de la tangente en B est $y = 4x+2$; pour $x = 1$, on trouve $y = 4+2 = 6$ donc cette tangente passe bien par $C(1\,;\,6)$.

Exercice III

On s'intéresse à la gestion des déchets ménagers au sein d'une grande agglomération.

Grâce au développement du recyclage, les experts estiment que la quantité de déchets de l'agglomération à incinérer devrait diminuer de 5 % par an. Par ailleurs, suite à la signature d'un contrat, cette agglomération s'engage à partir du 1er janvier 2020 à collecter et incinérer 12 000 tonnes de déchets supplémentaires par an provenant d'une commune voisine.

Durant l'année 2019, l'agglomération a incinéré 300 000 tonnes de déchets.

On admet que la situation peut être modélisée par une suite (u_n) dont le terme général u_n donne, pour tout entier naturel n, une estimation de la quantité (exprimée en millier de tonnes) de déchets incinérés durant l'année $2019+n$. On a ainsi $u_0 = 300$.

Partie A

1. (a) Le coefficient multiplicatreur associé à une baisse de 5 % est $1 - \dfrac{5}{100} = 0{,}95$.
   Par conséquent : $u_1 = 0{,}95u_0 + 12 = 0{,}95 \times 300 + 12 = 297$; $\boxed{u_1 = 297}$.

   (b) De même : $\boxed{u_{n+1} = 0{,}95u_n + 12}$ (quasi évident, en généralisant le calcul précédent!)
2. (a) Soit $\mathscr{P}_n$ la propriété : $200 \leq u_{n+1} \leq u_n$.
   Démontrons cette propriété par récurrence :
   - **Initialisation** : $u_0 = 300$ et $u_1 = 297$ donc $200 \leqslant u_1 \leqslant u_0$; $\mathscr{P}_0$ est vraie.

- **hérédité** : on suppose $\mathscr{P}n$ vraie pour un entier n quelconque (hypothèse de récurrence).
  $200 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n \Rightarrow 0,95 \times 200 \leqslant 0,95u_{n+1} \leqslant 0,95u_n$
  $\Rightarrow 0,95 \times 200 + 12 \leqslant 0,95u_{n+1} + 12 \leqslant 0,95u_n + 12 \Rightarrow 202 \leqslant u_{n+2} \leqslant u_{n+1} \Rightarrow 200 \leqslant u_{n+2} \leqslant u_{n+1}$.
  $\mathscr{P}_n$ est donc héréditaire.

  D'après l'axiome de récurrence $\mathscr{P}_n$ est vraie pour tout n.

(b) D'après ce qu'on vient de montrer, $u_{n+1} \leqslant u_n$ pour tout n, donc (u_n) est décroissante.
De même, $200 \leqslant u_n$ pour tout n, donc (u_n) est minorée.
La suite (u_n) est décroissante minorée, donc elle est convergente.

3. (a) Pour tout n, $v_{n+1} = u_{n+1} - 240 = 0,95u_n + 12 - 240 = 0,95u_n - 228 = 0,95\left(u_n - \dfrac{228}{0,95}\right)$
   $= 0,05(u_n - 240) = \boxed{0,95n_n}$.
   $v_{n+1} = 0,95v_n$ pour tout n, donc (v_n) est géométrique, de raison $\boxed{q = 0,95}$.
   $v_0 = u_0 - 240 = 300 - 240 = 60$; $\boxed{v_0 = 60}$.

   (b) Puisque (v_n) est géométrique de réison $q = 0,95$, $v_n = v_0 q^n = \boxed{60 \times 0,95^n}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

   (c) $v_n = u_n - 240$ donc $u_n = v_n + 240$ donc, pour tout n, $\boxed{u_n = 60 \times 0,95^n + 240}$.

4. $-1 < 0,95 < 1$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} 0,95^n = 0$.
   On en déduit que $\boxed{\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 240}$.
   Interprétation : la quatité de déchets à traiter va se stabiliser à terme à une quantité de 240 000 tonnes.

Partie B

L'agglomération s'est fixé l'objectif d'une diminution de la quantité de déchets incinérés de 15 % d'ici 2039 par rapport à 2019.

1. Si la diminution des déchets suit les prévisions des experts, le tonnage des déchets recyclés sera en 2039, soit pour $n = 20$ de u_{20} milliers de tonnes.
   $u_{20} = 60 \times 0,95^{20} + 240 \approx 261,509$; donc le tonnage en 2039 est d'environ 261 509 tonnes.
   On veut une baisse de 15 % par rapport à 2019, soit un tonnage de $300\,000\left(1 - \dfrac{15}{100}\right) = 255\,000$ tonnes.
   L'objectif ne sera donc pas atteint.

2. (a) Recopier et compléter le programme écrit ci-dessous en Python afin qu'il affiche, après exécution, l'année à partir de laquelle la quantité de déchets incinérés aura diminué de 15 % par rapport à 2019.

```
def seuil() :
    N = 2019
    U = 300
    while U > 255 :
        N = N + 1
        U = 0.95 × U + 12
    return N
```

   (b) $u_{27} \approx 255,02 > 255$ et $u_{28} \approx 254,27 \leqslant 255$ donc l'objectif sera atteint en $2019 + 28$ soit en 2047.