Correction du contrôle sur les suites et limites de suites

I

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ signifie que pour tout $A \in \mathbb{R}$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $u_n > A$ pour tout $n > n_0$.

II

Calculer les limites suivantes : (en justifiant)

a) $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty}\left(n^2+1\right) = +\infty}$ car $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2 = +\infty$ et $n^2+1 > n^2$ (théorème de comparaison).

b) $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n+1} = 0}$.

c) Étude de $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(n^2-2n\right)$; on a une **forme indéterminée**.

$n^2-2n = n(n-2)$; $\lim\limits_{n\to+\infty} n = +\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}(n-2) = +\infty$ donc par produit, $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty}\left(n^2-2n\right) = +\infty}$.

On peut aussi mettre n^2 en facteur : $n^2-2n = n^2\left(1-\dfrac{2}{n}\right)$; $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2 = +\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1-\dfrac{2}{n}\right) = 1$ d'où $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty}\left(n^2-2n\right) = +$

par produit.

d) $\dfrac{2n+3}{3n+2} = \dfrac{n\left(2+\frac{3}{n}\right)}{n\left(3+\frac{2}{n}\right)} = \dfrac{2+\frac{3}{n}}{3+\frac{2}{n}}$.

$\lim\limits_{n\to+\infty}\left(2+\dfrac{3}{n}\right) = 2$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(3+\dfrac{2}{n}\right) = 3$ d'om : $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{2n+3}{3n+2}\right) = \dfrac{2}{3}}$.

e) $\dfrac{5n+1}{3n^2+1} = \dfrac{n\left(5+\frac{1}{n}\right)}{n^2\left(3+\frac{1}{n^2}\right)} = \dfrac{5+\frac{1}{n}}{n\left(3+\frac{1}{n^2}\right)}$.

$\lim\limits_{n\to+\infty}\left(5+\dfrac{1}{n}\right) = 5$; $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(3+\dfrac{1}{n^2}\right) = 3$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} n\left(3+\dfrac{1}{n^2}\right) = +\infty$.

Par quotient : $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{5n+1}{3n^2+1}\right) = 0}$

f) $-1 < \dfrac{1}{4} < 1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{1}{4}\right)^n = 0$.

On en déduit : $\lim\limits_{n\to+\infty} 3 \times \dfrac{1-\left(\frac{1}{4}\right)^n}{1-\frac{1}{4}} = 3 \times \dfrac{1}{\frac{3}{4}} = \boxed{4}$

III VRAI OU FAUX

Dire si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses et justifier, par exemple à l'aide d'un contre-exemple dans le cas ou l'affirmation est fausse.

1. Toute suite décroisante est majorée.
   $\boxed{\text{VRAI}}$; elle est majorée par son premier terme.
2. Soit (u_n) une suite convergente.
   Si, à partir d'un certain rang, tous les termes de la suite (u_n) sont strictement positifs, alors la limite de la suite (u_n) est aussi strictement positive.
   $\boxed{\text{FAUX}}$: contre-exemple : $u_n = \dfrac{1}{n+1}$. tous les termes sont positifs, mais la limite est 0.

3. On suppose que, pout tout $n \in \mathbb{N}^*$,
$$-1-\frac{1}{n} \leqslant u_n \leqslant 1+\frac{1}{n}.$$
Alors la suite (u_n) converge.
$\boxed{\text{FAUX}}$: contre-exemple : $u_n = (-1)^n$; cette suite diverge et tous les termes sont compris entre -1 et 1, donc entre $-1-\frac{1}{n}$ et $1+\frac{1}{n}$.
4. Toute suite bornée est convergente.
$\boxed{\text{FAUX}}$: contre-exemple : $u_n = (-1)^n$ qui vaut alternativement -1 ou 1, donc on a une suite bornée mais divergente.
5. Une suite croissante a tous ses termes strictement positifs à partir d'un certain rang.
$\boxed{\text{FAUX}}$: contre-exemple : $u_n = -\frac{1}{n+1}$; (u_n) est croissante mais constamment négative.
6. Si une suite est croissante et majorée par un nombre réel ℓ, alors elle converge vers ℓ.
$\boxed{\text{FAUX}}$: elle converge mais pas forcément vers ℓ ! contre-exemple : $u_n = 1-\frac{1}{n+1}$.
(u_n) est croissante, majorée par $\ell = 3$ mais tend vers 1.
7. Si une suite est monotone et bornée, alors elle converge.
$\boxed{\text{VRAI}}$: elle est croissante majorée ou décroissante minorée donc convergente

IV

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + 2$.

1. Soit $\mathscr{P}_n$ la propriété : $\boxed{u_n \leqslant 3}$.
Effectuons une démonstration par récurrence.
   - **Initialisation** : $u_0 = 1 \leqslant 3$ donc $\mathscr{P}0$ est vraie.
   - **Hérédité** : on suppose $\mathscr{P}_n$ vraie pour un entier n quelconque, donc $u_n \leqslant 3$ (hypoithèse de récurrence).
   $u_n \leqslant 3 \Rightarrow \frac{1}{3}u_n \leqslant 1 \Rightarrow \frac{1}{3}u_n + 2 \leqslant 3$ donc $\mathscr{P}_{n+1}$ est vraie.
   $\mathscr{P}_n$ est héréditaire ?

   D'après l'axiome de récurrence, $\mathscr{P}_n$ est vraie pour tout n donc $\boxed{u_n \leqslant 3}$.
2. Soit (v_n) la suite définie, pour tout $n \in \mathbb{N}$, par $v_n = u_n - 3$.
   (a) Pour tout n, $v_{n+1} = u_{n+1} - 3 = \frac{1}{3}u_n + 2 - 3 = \frac{1}{3}u_n - 1 = \frac{1}{3}(u_n - 3) = \frac{1}{3}v_n$ donc $\boxed{v_{n+1} = \frac{1}{3}v_n}$.
   (v_n) est donc géométrique de raison $\boxed{q = \frac{1}{3}}$ et de premier terme $\boxed{v_0 = u_0 - 3 = 1 - 3 = -2}$.
   (b)
   - On en déduit que, pour tout n, $v_n = v_0 q^n = \boxed{-2\left(\frac{1}{3}\right)^n}$.
   - Pour tout n, $v_n = u_n - 3$ donc $\boxed{u_n = 3 + v_n = 3 - 2\left(\frac{1}{3}\right)^n}$.

   (c) $-1 < \frac{1}{3} < 1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n = 0$.
   On en déduit : $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 3}$

V

La suite (u_n) est définie par $u_n = \dfrac{n+(-1)^n}{n+1}$.

1. POur tout $n \in \mathbb{N}$, $-1 \leqslant (-1)^n \leqslant 1$ donc $n-1 \leqslant n+(-1)^n \leqslant n+1$.

   En divisant par $n+1>0$: $\boxed{\dfrac{n-1}{n+1} \leqslant \dfrac{n+(-1)^n}{n+1} \leqslant 1}$.

2. $\dfrac{n-1}{n+1} = \dfrac{n\left(1-\frac{1}{n}\right)}{n\left(1+\frac{1}{n}\right)} = \dfrac{1-\frac{1}{n}}{1+\frac{1}{n}}$.

   $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1-\dfrac{1}{n}\right)=1$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)=1$ d'où $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1-\frac{1}{n}}{1+\frac{1}{n}}=1$.

   D'après le théorème des gendarmes, $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1}$.

VI

Pour chacune des fonctions f suivantes, calculer l'expression de $f'(x)$ où f' est la fonction dérivée de f.

(a) $f(x) = \dfrac{3x+5}{7x-2}$ sur $\mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus \left\{\dfrac{2}{7}\right\}$.

$f'(x) = \dfrac{3(7x-2)-7(3x+5)}{(7x-2)^2} = \boxed{-\dfrac{41}{(7x-2)^2}}$.

(b) $f(x) = (3x+5)\sqrt{x}$ sur $\mathscr{D} =]0\,;\,+\infty[$.

$f'(x) = 3\sqrt{x} = (3x+5)\times\dfrac{1}{2\sqrt{x}} = \dfrac{6x+3x+5}{2\sqrt{x}} = \boxed{\dfrac{9x+5}{2\sqrt{x}}}$.

(c) $f(x) = 3x^2+5x+1+2\sqrt{x}$ sur $\mathscr{D} =]0\,;\,+\infty[$.

$f'(x)6x+5+2\times\dfrac{1}{2\sqrt{x}} = \boxed{6x+5+\dfrac{1}{\sqrt{x}}}$.

VII

On considère les fonctions $f : x \longmapsto (x+1)\sqrt{x}$ et $g : x \longmapsto x^3 + \dfrac{1}{x}$ sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.

1. $f(1) = g(1) = 2$ donc le point $C(1\,;\,2)$ appartient aux deux courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$.

2. $f'(x) = \sqrt{x} = (x+1)\times\dfrac{1}{2\sqrt{x}} = \dfrac{3x+1}{2\sqrt{x}}$ d'où $f'(1) = 2$.

   ‘ $g'(x) = 3x^2 - \dfrac{1}{x^2}$ donc $g'(1) = 2$.

   $\boxed{f(1) = g(1)}$ et $\boxed{f'(1) = g'(1)}$ donc les deux courbes ont la même tangente en C (même coefficient directeur et un point commun).