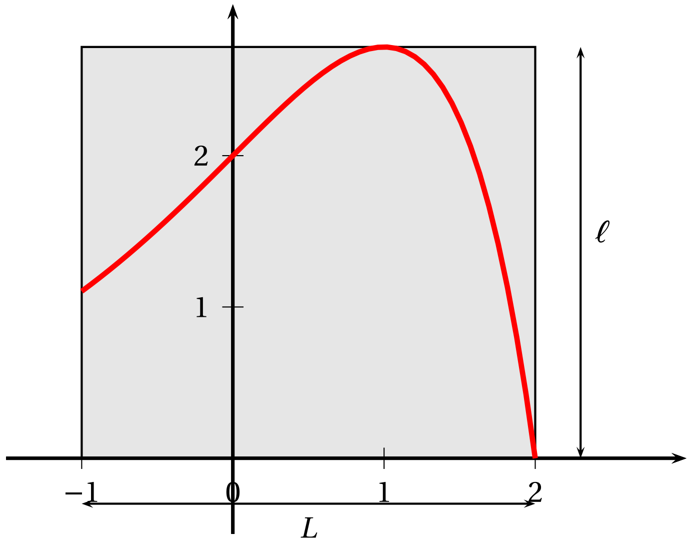
Exercices sur la fonction exponentielle (2)

I

Une entreprise de menuiserie réalise des découpes dans des plaques rectangulaires de bois.
Dans un repère orthonormé d'unité 30 cm ci-dessous, on modélise la forme de la découpe dans la plaque rectangulaire par la courbe $\mathscr{C}_f$ représentative de la fonction f définie sur l'intervalle [-1 ; 2] par :

$$f(x) = (-x+2)\mathrm{e}^x.$$



Le bord supérieur de la plaque rectangulaire est tangent à la courbe $\mathscr{C}_f$. On nomme L la longueur de la plaque rectangulaire et ℓ sa largeur.
On note f' la fonction dérivée de f .

1. $f = uv$ avec $\begin{cases} u(x) = -x+2 \\ v(x) = \mathrm{e}^x \end{cases}$.

   $f' = (uv)' = u'v + uv'$ avec $\begin{cases} u'(x) = -1 \\ v'(x) = \mathrm{e}^x \end{cases}$.

   D'où : $f'(x) = -\mathrm{e}^x = (-x+2)\mathrm{e}^x = \mathrm{e}^x(-1+(2-x)) = \boxed{(-x+1)\mathrm{e}^x}$

2. $\forall x \in \mathbb{R}$, $\mathrm{e}^x > 0$ donc $f'(x)$ est du signe de $-x+1$, qui s'annule en 1 et est positif pour $x \leqslant 1$ (car la fonction $x \mapsto -x+1$ est décroissante).
   On en déduit le signe de $f'(x)$ et les variations de f.

x	-1		1		2
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$3\mathrm{e}^{-1}$	$\nearrow$	e	$\searrow$	0

3. f a un maximum, e, atteint en 1.
   Puisque la plaque est tangente à la courbe, on a $\ell = 2$ u.l, donc $\boxed{\ell = 30\mathrm{e}\ \text{cm}}$

II

Soit la fonction g, définie sur tous les réels par $g(x) = 1 - x + \mathrm{e}^x$.

1. - g est dérivable comme somme de fonctions dérivables.
     $\boxed{g'(x) = -x + \mathrm{e}^x}$.
   - $g'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$.
   - $g'(x) > 0 \Leftrightarrow -1 + \mathrm{e}^x > 0 \Leftrightarrow \mathrm{e}^x > 1 \Leftrightarrow x > 0$
   - Taableau de variation de g :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$		$\searrow$	2	$\nearrow$	

2. g a pour minimum 2 en 0; on en déduit que $g(x) > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

   On définit maintenant la fonction f sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x + 1 + \dfrac{x}{\mathrm{e}^x}$.

3. $\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 1 + 0 + \dfrac{1 \times \mathrm{e}^x - x\mathrm{e}^x}{(\mathrm{e}^x)^2}$
   $= 1 + \dfrac{(1-x)\mathrm{e}^x}{(\mathrm{e}^x)^2} = 1 + (1-x)\mathrm{e}^{-x} = \left(\mathrm{e}^x + 1 - x\right)\mathrm{e}^{-x}$
   $= \boxed{\mathrm{e}^{-x} g(x)}$
   car $\dfrac{\mathrm{e}^x}{(\mathrm{e}^x)^2} = \dfrac{1}{\mathrm{e}^x} = \mathrm{e}^{-x}$.
4. $\forall x \in \mathbb{R}$, $\mathrm{e}^{-x} > 0$ donc $f'(x)$ est du signe de $g(x)$, donc $\boxed{f'(x) > 0}$ sur $\mathbb{R}$.
   f est donc **croissante** sur $\mathbb{R}$
5. La tangente en a a pour équation réduite : $y = f'(a)(x-a) + f(a)$.
   Pour $a = 0$, on obtient : $y = f'(0)x + f(0)$
   $\Leftrightarrow \boxed{y = 2x + 2}$.
   La tangente $\mathscr{T}$ en 0 a donc pour équation $\boxed{y = 2x + 1}$.
6. Pour étudier la position relative de $\mathscr{C}$ et $\mathscr{T}$, on étudie le signe de $f(x) = (2x+2)$.
   $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) - (2x+2) = x + 1 + \dfrac{x}{\mathrm{e}^x} - 2x - 1$
   $= -x + \dfrac{x}{\mathrm{e}^x} = \dfrac{-x\mathrm{e}^x + x}{\mathrm{e}^x} = \dfrac{x(\mathrm{e}^x - 1)}{\mathrm{e}^x}$ qui est du signe de $x\left(\mathrm{e}^x - 1\right)$.
   x s'annule en 0 et $\mathrm{e}^x - 1$ aussi avec $\mathrm{e}^x - 1 > 0 \Leftrightarrow x > 0$.
   Tableau de signes :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
Signe de x		$-$	0	$+$	
Signe de $\mathrm{e}^x - 1$		$-$	0	$+$	
Signe de $x\left(\mathrm{e}^x - 1\right)$		$+$	0	$+$	

   On en déduit que $\mathscr{C}$ est toujours au-dessus de $\mathscr{T}$, avec point de tangence en 0.

   Couirbe (non demandée)