# Correction

## I Antilles-Guyane juin 2018

Le directeur d'une réserve marine a recensé 3 000 cétacés dans cette réserve au 1er juin 2017. Il est inquiet car il sait que le classement de la zone en « réserve marine » ne sera pas reconduit si le nombre de cétacés de cette réserve devient inférieur à 2 000.

Une étude lui permet d'élaborer un modèle selon lequel, chaque année :

— entre le 1er juin et le 31 octobre, 80 cétacés arrivent dans la réserve marine;

— entre le 1er novembre et le 31 mai, la réserve subit une baisse de 5 % de son effectif par rapport à celui du 31 octobre qui précède.

On modélise l'évolution du nombre de cétacés par une suite $(u_n)$. Selon ce modèle, pour tout entier naturel $n$, $u_n$ désigne le nombre de cétacés au 1er juin de l'année $2017+n$. On a donc $u_0 = 3000$.

1. $u_1 = (u_0 + 80) \times 0,95 = 0,95 \times 3080 = \boxed{2926}$.
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = (u_n + 80) \times 0,95 = \boxed{0,95u_n + 76}$.
3. À l'aide d'un tableur, on a calculé les 8 premiers termes de la suite $(u_n)$. Le directeur a configuré le format des cellules pour que ne soient affichés que des nombres arrondis à l'unité.

| | A | B | C | D | E | F | G | H | I |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | $n$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| 2 | $u_n$ | 3 000 | 2 926 | 2 856 | 2 789 | 2 725 | 2 665 | 2 608 | 2 553 |

En C2, on doit taper $\boxed{\text{« =0.95*B2+76 »}}$

4. (a) Montrons par récurrence que, pour tout $n$, $u_n \geqslant 1520$.
   - **Initialisation** : $u_0 = 3000 \geqslant 1520$ donc la propriété est vraie au rang 0.
   - **Hérédité** : On suppose que $u_n \geqslant 1520$ pour un entier $n$ quelconque.
     Alors : $0,95u_n \geqslant 0,95 \times 1520$ d'où $0,95u_n + 76 \geqslant 0,95 \times 1520 + 76 = 1520$ donc la propriété est héréditaire.

   D'après l'axiome de récurrence, la propriété est vraie pour tout $n$.

   (b) Pour tout $n$, $u_{n+1} - u_n = 0,95u_n + 76 - u_n = -0,05u_n + 76 = -0,05(u_n - 1520) \leqslant 0$ car on a montré que $u_n \geqslant 1520$.
   La suite $(u_n)$ est bien **décroissante**.

   (c) La suite $(u_n)$ est décroissante et minée par 1 250, donc **convergente**, mais on ne connaît pas la limite $\ell$.

5. On désigne par $(v_n)$ la suite définie par, pour tout entier naturel $n$, $v_n = u_n - 1520$.

   (a) Pour tout $n$, $v_{n+1} = u_{n+1} - 1520 = 0,95u_n + 76 - 1520 = 0,95u_n - 1444 = 0,95(u_n - 1520)$ $= \boxed{0,95v_n}$.
   La suite $(v_n)$ est géométrique, de raison $q = 0,95$ et de premier terme $v_0 = u_0 - 1520 = 3000 - 1520 = 1480$.

   (b) Par conséquent, puisque $(v_n)$ est géométrique, $v_n = v_0q^n = 1480 \times 0,95^n$ donc $\boxed{u_n = 1480 \times 0,95^n + 1520}$.

   (c) $-1 < 0,95 < 1$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} 0,05^n = 0$ d'où $\boxed{\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 1520}$.

6. Recopier et compléter l'algorithme suivant pour déterminer l'année à partir de laquelle le nombre de cétacés présents dans la réserve marine sera inférieur à 2 000.

```
n ← 0
u ← 3000
Tant que u>2000
    n ← n+1
    u ← 0.95*u+76
Fin de Tant que
```

7. On a vu que la limite de la suite est 1 520 donc il y a une valeur de la suite pour laquelle $u_n < 1200$.
   On trouve $\boxed{n = 22}$.

# II Sujet 1 année 2021

La suite $(u_n)$ est définie sur $\mathbb{N}$ par $u_0 = 1$ et pour tout $n$, $u_{n+1} = \dfrac{3}{4}u_n + \dfrac{1}{4}n + 1$.

1. Pour $n = 0$, $u_1 = u_{0+1} = \dfrac{3}{4}u_0 + \dfrac{1}{4} \times 0 + 1 = \dfrac{3}{4} \times 1 + 1 = \boxed{\dfrac{7}{4}}$.

   Pour $n = 1$, $u_1 = u_{1+1} = \dfrac{3}{4}u_1 + \dfrac{1}{4} \times 1 + 1 = \dfrac{3}{4} \times \dfrac{7}{4} + \dfrac{1}{4} + 1 = \boxed{\dfrac{41}{16}}$.

L'extrait, reproduit ci-contre, d'une feuille de calcul réalisée avec un tableur présente les valeurs des premiers termes de la suite $(u_n)$.

| | A | B |
|---|---|---|
| | $n$ | $u_n$ |
| 2 | 0 | 1 |
| 3 | 1 | 1,75 |
| 4 | 2 | 2,562 5 |
| 5 | 3 | 3,421 875 |
| 6 | 4 | 4,316 406 25 |

1. (a) La formule, étirée ensuite vers le bas, que l'on peut écrire dans la cellule B3 de la feuille de calcul pour obtenir les termes successifs de $(u_n)$ dans la colonne B est :
   $\boxed{= 3/4 * B2 + 1/4 * A2 +1}$.

   (b) La suite $(u_n)$ **semble croissante**.

2. (a) Soit $\mathscr{P}_n$ la propriété : $n \leqslant u_n \leqslant n+1$.

   - **Initialisation**
     Pour $n = 0$, $u_0 = 1$ et $0 \leqslant 1 \leqslant 1$ donc $\mathscr{P}_0$ est vraie.
   - **Hérédité**
     On suppose $\mathscr{P}_n$ vraie, c'est-à-dire : $n \leqslant u_n \leqslant n+1$ (hypothèse de récurrence).
     $n \leqslant u_n \leqslant n+1$
     $\iff \dfrac{3}{4}n \leqslant \dfrac{3}{4}u_n \leqslant \dfrac{3}{4}(n+1)$
     $\iff \dfrac{3}{4}n + \dfrac{1}{4}n \leqslant \dfrac{3}{4}u_n + \dfrac{1}{4}n \leqslant \dfrac{3}{4}(n+1) + \dfrac{1}{4}n$
     $\iff n \leqslant \dfrac{3}{4}u_n + \dfrac{1}{4}n \leqslant n + \dfrac{3}{4}$

$\iff n+1 \leqslant \dfrac{3}{4}u_n + \dfrac{1}{4}n + 1 \leqslant n + \dfrac{3}{4} + 1$

$\iff n+1 \leqslant u_{n+1} \leqslant n + \dfrac{7}{4}$

donc $n+1 \leqslant u_{n+1} \leqslant n+2$.

On a démontré que la propriété était vraie au rang $n+1$.

- **Conclusion**

  La propriété est vraie au rang 0, et elle est héréditaire pour tout $n \geqslant 0$; d'après le principe de récurrence, la propriété est vraie pour tout $n \geqslant 0$.

On a donc démontré que, pour tout entier naturel $n$, on a : $\boxed{n \leqslant u_n \leqslant n+1}$.

(b) D'après la question précédente :

- Pour tout $n$, $n \leqslant u_n \leqslant n+1$ donc $n+1 \leqslant u_{n+1} \leqslant n+2$ donc $n \leqslant u_n \leqslant n+1 \leqslant u_{n+1} \leqslant n+2$ d'où on tire $u_n \leqslant u_{n+1}$ ce qui démontre que la suite $(u_n)$ est **croissante**.
- Pour tout $n$, $n \leqslant u_n$ ; or $\lim\limits_{n \to +\infty} n = +\infty$ donc, par comparaison, $\boxed{\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty}$.

(c) Pour tout $n$, $n \leqslant u_n \leqslant n+1$ donc pour tout $n > 0$, on a : $1 \leqslant \dfrac{u_n}{n} \leqslant \dfrac{n+1}{n}$ c'est-à-dire : $1 \leqslant \dfrac{u_n}{n} \leqslant 1 + \dfrac{1}{n}$.

$\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1}{n} = 0$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} 1 + \dfrac{1}{n} = 1$

Donc, d'après le **théorème des gendarmes** : $\boxed{\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{u_n}{n} = 1}$.

3. On désigne par $(v_n)$ la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $v_n = u_n - n$

(a) Pour tout $n$, $v_n = u_n - n$ donc $u_n = v_n + n$.

$v_{n+1} = u_{n+1} - (n+1) = \dfrac{3}{4}u_n + \dfrac{1}{4}n + 1 - n - 1 = \dfrac{3}{4}(v_n + n) - \dfrac{3}{4}n = \dfrac{3}{4}v_n + \dfrac{3}{4}n - \dfrac{3}{4}n = \dfrac{3}{4}v_n$

$v_0 = u_0 - 0 = 1$

Donc la suite $(v_n)$ est **géométrique** de raison $q = \dfrac{3}{4}$ et de premier terme $v_0 = 1$.

(b) On en déduit que, pour tout $n$, $v_n = v_0 \times q^n = \left(\dfrac{3}{4}\right)^n$.

Comme $u_n = v_n + n$, on a $\boxed{u_n = \left(\dfrac{3}{4}\right)^n + n}$.